Mátrixok LU-felbontása és QR-felbontása

Egy mátrix LU felbontása azt jelenti, hogy a mátrixot felbontjuk egy alsó és egy felső háromszögmátrix szorzatára. Módszere a Gauss eliminációra épül.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy nxn-es mátrixnak akkor létezik LU-felbontása, ha az első n-1 főminora nem nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyha egy olyan mátrix LU felbontására van szükségünk, amelynek valamelyik (nem utolsó) főminora 0, akkor megtehetjük azt, hogy egy premutációs mátrix segítségével felcseréljük a sorait. Hiszen a sorcsere hatására a mátrix determinánsa, az egyenletrendszer megoldása stb. nem változnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az LU-felbontás módszere nem négyzetes mátrixokra ugyanolyan, mint eddig, a Gauss elimináció segítségével történik. Legfeljebb az U mátrix nem lesz négyzetes, így nem lesz valódi felső háromszögmátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A mátrix szimmetrikus és pozitív definit mátrix, akkor egyértelműen létezik olyan pozitív diagonálisú L alsó háromszögmátrix, amelyre:

$$A = L \cdot L^T$$

Ezt a felbontást Cholesky-felbontásnak nevezzük. Ez tulajdonképpen egy olyan LU-felbontás, ahol az U mátrix az L-nek a transzponáltja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyha az A egy olyan nxk-as mátrix, $n \geq k$, és a mátrix teljes oszloprangú, vagyis az oszlopvektorok rangja k, akkor létezik olyan nxn-es Q ortogonális mátrix, és olyan R felső háromszögmátrix, hogy

$$A = Q \cdot R$$

Ezt a felbontást nevezzük QR-felbontásnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

QR-felbontást kaphatunk akkor is, ha az A mátrixot addig-addig szorozgatjuk Givens forgatások mátrixaival, amíg felső háromszögmátrixot nem kapunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrixból először készítünk egy felső háromszögmátrixot a Householder-tükrözések segítségével.

Hogyha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ különböző vektorok, és teljesül rájuk, hogy $|\underline{a}|=|\underline{b}|$ akkor létezik olyan Householder-tükrözés, ami az $\underline{a}$ vektort a $\underline{b}$ vektorba transzformálja.

$$H = I - 2 \cdot \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}^T}{\underline{v}^T \cdot \underline{v}}$$

ahol $\underline{v} = \underline{a} - \underline{b}$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot