Iterációs módszerek egyenletrendszerek megoldására

Az $f : R \mapsto R$ leképezést kontrakciónak nevezzük, ha létezik olyan $0 < q < 1$ valós szám, hogy minden $x \in R$ és $y \in R$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyha az $f\ R \mapsto R$ leképezés kontrakció, akkor egyértelműen létezik egy $x^* \in R$ fixpont, amelyre $f(x^*) = x^*$ és tetszőleges x_0 pontból induló $x_{n+1} = f(x_n)$ sorozat konvergens és $x_n \to x^*$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konvergencia gyorsaságára a következő hibabecslés adható:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyha itt van ez az egyenlet...

$$2x+1=5x-5$$

Aminek a megoldása $x=2$, akkor megoldhatjuk iterációs módszerekkel is.

Az első lépés, hogy kifejezzük x-et, lehetőleg úgy, hogy az együtthatója 1-nél kisebb legyen:

$$x=\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$$

Így $f(x)=\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$ egy kontrakció, és a fixpontja $x^*=f(x^*)$, ami éppen az egyenlet megoldása.

Ha most veszünk egy ilyen sorozatot:

$$x_{n+1}=f(x_n) \qquad x_n \to x^*=2$$

Akkor a fixponttétel miatt ez a sorozat konvergál a fixponthoz, vagyis az egyenlet megoldásához.

Ezt a sorozatot iterációs sorozatnak nevezzük, magát az eljárást pedig iterációnak.

Az iteráció lényege, hogy elkezdjük egyesével kiszámolni a sorozat tagjait. És minél több tagot számolunk ki, annál közelebb kerülünk a megoldáshoz.

$$x_{n+1}=\frac{2}{5}x_n+\frac{6}{5} \qquad x_n \to x^*=2$$

$$x_0=0$$

$$x_1=\frac{2}{5}\cdot 0+\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x_2=\frac{2}{5}\cdot 1{,}2+\frac{6}{5}=1{,}68$$

$$x_3=\frac{2}{5}\cdot 1{,}68+\frac{6}{5}=1{,}872$$

$$x_4=\frac{2}{5}\cdot 1{,}872+\frac{6}{5}=1{,}9488$$

$$\dots$$

$$x_{10}=1{,}99979$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen A egy nxn-es reguláris mátrix, és az $A\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszer megoldása $\underline{x}^*$. Ekkor az

$$\underline{x}^{(n+1)}=B\underline{x}^{(n)}+\underline{c}$$

iterációt az egyenletrendszerrel konzisztensnek nevezzük, ha teljesül rá, hogy

$$\underline{x}^*=B\underline{x}^*+\underline{c}$$

Az $\underline{x}^{(n+1)}=B\underline{x}^{(n)}+\underline{c}$ iteráció pontosan akkor tart az egyenletrendszer megoldásához, ha $\rho(B)<1$

A Jacobi iteráció szerint:

$$\underline{x}^{(n+1)}=D^{-1}(-L-U)\underline{x}^{(n)}+D^{-1}\underline{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix spektrálsugarát úgy kapjuk meg, hogy vesszük a sajátértékeinek az abszolútértékét, és ezek közül a legnagyobb a spektrálsugár.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen A egy nxn-es reguláris mátrix, és az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldása $\underline{x}^*$. Ekkor az

$$\underline{x}^{(n+1)} = B\underline{x}^{(n)} + \underline{c}$$

iterációt az egyenletrendszerrel konzisztensnek nevezzük, ha teljesül rá, hogy

$$\underline{x}^* = B\underline{x}^* + \underline{c}$$

Az $\underline{x}^{(n+1)} = B\underline{x}^{(n)} + \underline{c}$ iteráció pontosan akkor tart az egyenletrendszer megoldásához, ha $\rho(B) < 1$

A Gauss-Seidel iteráció szerint:

$$\underline{x}^{(n+1)} = (D+L)^{-1}(-U)\underline{x}^{(n)} + (D+L)^{-1}\underline{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer A együtthatómátrixa szigorúan diagonális domináns, akkor a Jacobi és a Gauss-Seidel iterációk is bármely kezdővektor esetén az egyenletrendszer megoldásához konvergálnak.

Ha az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer A együtthatómátrixa szimmetrikus pozitív definit mátrix, akkor a Gauss-Seidel iteráció bármely kezdővektor esetén az egyenletrendszer megoldásához konvergál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrixot szigorúan diagonálisan dominánsak nevezünk, ha bármely sorában a főátlóban lévő elem abszolútértéke nagyobb, mint a sorban szereplő összes többi elem abszolútértékének összege.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|a_{ii} > \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} |\, a_{ik}|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{x}^{(n+1)} = B\underline{x}^{(n)} + \underline{c}$ iteráció pontosan akkor tart az egyenletrendszer megoldásához, ha $\rho(B) < 1$

A Richardson iteráció szerint:

$$\underline{x}^{(n+1)} = (I - \alpha \cdot A)\underline{x}^{(n)} + \alpha \cdot \underline{b} \quad \alpha \in R,\ \alpha \neq 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A relaxációs módszerek segítségével megváltoztathatjuk az iterációk konvergenciájának sebességét.

$$\underline{v} = (1-\omega)\cdot\underline{x}^{(n)} + \omega\cdot\underline{x}^{(n+1)} \quad \omega \in R$$

A trükk lényege, hogy az iterációs sorozat vektorait szépen egyesével kicseréljük ezekre a $\underline{v}$ vektorokra.

Az ω paramétert relaxációs paraméternek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{x}^{(n+1)} = B\underline{x}^{(n)} + \underline{c}$ iteráció pontosan akkor tart az egyenletrendszer megoldásához, ha $\rho(B) < 1$

A Relaxált Jacobi iteráció (JOR) szerint:

$$\underline{x}^{(n+1)} = (I - \omega D^{-1}A)\underline{x}^{(n)} + \omega\cdot D^{-1}\underline{b} \quad \omega \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{x}^{(n+1)} = B\underline{x}^{(n)} + \underline{c}$ iteráció pontosan akkor tart az egyenletrendszer megoldásához, ha $\rho(B) < 1$

A Relaxált Jacobi iteráció (JOR) szerint:

$$\underline{x}^{(n+1)} = (I - \omega D^{-1}A)\underline{x}^{(n)} + \omega\cdot D^{-1}\underline{b} \quad \omega \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{x}^{(n+1)} = B\underline{x}^{(n)} + \underline{c}$ iteráció pontosan akkor tart az egyenletrendszer megoldásához, ha $\rho(B) < 1$

A Relaxált Gauss-Seidel módszer (SOR) szerint:

$$\underline{x}^{(n+1)} = (D + \omega\cdot L)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega\cdot U\right)\underline{x}^{(n)} + \omega\cdot(D+\omega\cdot L)^{-1}\underline{b} \quad \omega \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{x}^{(n+1)} = B\underline{x}^{(n)} + \underline{c}$ iteráció pontosan akkor tart az egyenletrendszer megoldásához, ha $\rho(B) < 1$

A Relaxált Gauss-Seidel módszer (SOR) szerint:

$$\underline{x}^{(n+1)} = (D + \omega\cdot L)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega\cdot U\right)\underline{x}^{(n)} + \omega\cdot(D+\omega\cdot L)^{-1}\underline{b} \quad \omega \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\|\underline{x}^* - \underline{x}^{(n)}\| \leq \frac{\|B\|^n}{1-\|B\|}\cdot\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot
