

## Kétfváltozós függvények

A kétfváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétfváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az  $x$ ,  $y$  sík felett a függvény, ami egy felület.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Az  $f(x, y)$  függvény  $x$  szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy  $x$  szerint deriválunk,  $y$  most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami  $x$ -essel, akkor marad

Az  $f(x, y)$  függvény  $y$  szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy  $y$  szerint deriválunk,  $x$  most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami  $y$ -ossal, akkor marad

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x, y) \quad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x, y)$$

Második lépés:

$$f'_x(x, y) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$f'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$  pozitív, és  $f''_{xx} > 0$ , akkor lokális minimum van.

Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$  pozitív, és  $f''_{xx} < 0$ , akkor lokális maximum van.

Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$  negatív, akkor nyeregpont van.

Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$  nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f(x, y)$  függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét [parciális derivált](#) nulla, az  $f(x, y)$  függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az  $f$  többváltozós függvénynek az  $x_0 \in D_f$  pontban léteznek  $f$  első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \dots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor  $x_0$  az  $f$  többváltozós függvény stacionárius pontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű deriváltakból képzett [mátrix](#), amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az  $f$  függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz  $f(x, y) = c$ , az  $f$  függvény szintvonalának nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f(x, y)$  függvényhez a  $P(x_0, y_0, z_0)$  pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f(x, y)$  függvény  $x$  és  $y$  szerinti deriváltjaiból álló vektort derivált-vektornak vagy másként gradiensnek hívjuk.

Íme a derivált-vektor:

$$\underline{f}'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad \text{röviden} \quad \underline{f}' = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

A derivált-vektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges  $\underline{v}$  irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az  $f(x, y)$  függvény  $\underline{v}$  iránymenti deriváltja az  $(x_0, y_0)$  pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{v}} = \underline{f}'(x_0, y_0) \cdot \underline{v}$$

(Itt  $\underline{v}$  egységvektor)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy függvény akkor implicit, ha  $y$  nincs kifejezve, vagyis nem  $y = \dots$  alakú.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $F(x, y) = 0$  egy egyváltozós implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}$$

Ha  $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$  egy  $n$  változós implicit függvény, akkor az  $x_i$ , mint implicit függvény deriváltja az  $x_j$  változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---