Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x-essel, akkor marad

Az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y-ossel, akkor marad

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x,y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x,y)$$

Második lépés:

$$f'_x(x,y) = 0$$

$$f'_y(x,y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét parciális derivált nulla, az $f(x,y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \cdots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű deriváltakból képzett mátrix, amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x,y) = c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0, y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{e}} = \mathrm{grad}\left(f(x_0, y_0)\right) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A függvényeket két nagy típusba sorolhatjuk, az explicit és az implicit függvények csoportjába. Az explicit függvények azok, amelyek egy konkrét képlettel vannak megadva, míg az implicit függvények valamilyen egyenlet formájában adhatók meg.

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \ldots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $F(x,y) = 0$ egy implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i, mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot
