Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x-essel, akkor marad

Az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y-ossal, akkor marad

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Első lépés:

$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x,y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x,y)$

Második lépés:

$f'_x(x,y) = 0$

$f'_y(x,y) = 0$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkétparciális derivált nulla, az $f(x,y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \cdots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű deriváltakból képzett mátrix, amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x,y)=c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0,y_0,z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+f(x_0,y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort derivált-vektornak vagy másként gradiensnek hívjuk.

Íme a derivált-vektor:

$$\underline{f}'(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} \quad \text{röviden} \quad \underline{f}' = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

A derivált-vektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja az (x_0,y_0) pontban:

$$\frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta \underline{v}} = \underline{f}'(x_0,y_0)\cdot\underline{v}$$

(Itt $\underline{v}$ egységvektor)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y=\dots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $F(x,y)=0$ egy egyváltozós implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad \frac{\delta x}{\delta y}=-\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}$$

Ha $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i, mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j}=-\frac{F'_j(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}{F'_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az x,y sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx=\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az x szerinti határokat adjuk meg és utána az y szerintit vagy fordítva.

Megnézem a kapcsolódó epizódot