MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEMATIKA GYÓGYSZERÉSZEKNEK
tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 16.

Tartalomjegyzék

Rémes előzmények

A megoldás lényege, hogy gyűjtsük össze az x-eket az egyik oldalon, a másik oldalon pedig a számokat, a végén pedig leosztunk az x együtthatójával.

Ha törtet is látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Ha a tört nevezőjében x is szerepel, akkor azzal kezdjük az egyenlet megoldását, hogy kikötjük, a nevező nem nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a másodfokú egyenlet így néz ki:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Akkor a megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodfokú egyenlet megoldóképletének gyök alatti részét nevezzük diszkriminánsnak.

$$D = b^2 - 4ac$$

Ez dönti el, hogy a másodfokú egyenletnek hány valós megoldása lesz.

Ha a diszkrimináns nulla, akkor csak egy.

Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek két valós megoldása van.

Ha pedig negatív, akkor az egyenletnek nincs valós megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy szám abszolútértékén a nullától való távolságát értjük.

Precizebben egy x szám abszolútértékén ezt értjük:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ ha } 0 \leq x \\ -x \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökös egyenletek megoldását mindig ezzel kell kezdeni:

$$\sqrt{\text{IZÉ}} \Rightarrow \text{IZÉ} \geq 0$$

$$\sqrt{\text{IZÉ}} = \text{VALAMI} \Rightarrow \text{VALAMI} \geq 0$$

Ezt követően az elsőszámú célunk, hogy megszabaduljunk a gyökjeltől, amit négyzetreemeléssel végezhetünk. Ilyenkor az a lehető legjobb, ha a gyökös izé magányosan álldogál.

Ha megszabadultunk a gyökjeltől, minden úgy megy tovább, ahogy azt már megszokhattuk az egyenleteknél.

A végén viszont fontos, hogy ellenőriznünk kell, a megoldásunk megfelel-e a feladat elején felírt kritériumnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatványozás azonosságai:

$$a^n a^k = a^{n+k}$$

$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(a^n\right)^k = a^{nk} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális függvénynek nevezzük az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket, ahol $a > 0$ valós szám.

Az exponenciális függvények meglehetősen fontosak a matematikában, sőt nem csak a matematikában.

Ilyen függvények írják le a baktériumok szaporodását, a radioaktív elemek bomlását, a számítógépek teljesítményének növekedését és még rengeteg más dolgot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális egyenletek megoldásának kulcsa, hogy a két oldalt azonos hatványalapra hozzuk, mert ekkor

$$a^x = a^b \Rightarrow x = b$$

Így hát az egyenlet két oldalát addig alakítgatjuk a hatványozás azonosságainak segítségével, amíg erre az alakra nem jutunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$log_a x$ azt mondja meg, hogy a-t hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy x-et kapjunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a \sqrt[n]{x^k} = \frac{k}{n} \log_a x$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönesen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorozatok

$\frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \frac{1}{n^3} \to 0 \quad \frac{1}{n^k} \to 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$n \to \infty \quad n^2 \to \infty \quad n^3 \to \infty \quad n^k \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{n} \to \infty \quad \sqrt[3]{n} \to \infty \quad \sqrt[4]{n} \to \infty \quad \sqrt[k]{n} \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$q^n \to \begin{cases} \infty \text{ ha } q > 1 \\ 0 \text{ ha } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ ha } q = 1 \\ \text{div ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha$

$\left(1 + \frac{\alpha}{\text{IZÉ}}\right)^{\text{IZÉ}} \to e^\alpha$

Ha IZÉ $\to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van egy olyan valós szám, ami a sorozat határértéke.

Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens.

Egy sorozat lehet azért is divergens, mert végtelenbe tart, és lehet azért is, mert az égvilágon nem tart sehova. A sehova nem tartó sorozatok mindig oszcilláló sorozatok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to A$ és $c_n \to A$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$ akkor $b_n \to A$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \sqrt[n]{n} \to 1 \quad \sqrt[n]{n^k} \to 1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A végtelenbe tartó sorozatok nagyságrendi sorrendje azt mondja meg, hogy melyik sorozat milyen ütemben tart a végtelenbe. Minél nagyobb nagyságrendű egy sorozat, annál gyorsabban tart a végtelenbe. A nagysagrendi rangsor:

$$\log_n << \sqrt[k]{n} << n^k << q^n << n! << n^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha bármilyen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

Ennél precizebben az a_n sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén végtelen sok tagja van, hogy $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza legyen $\{A_i\}$

Ekkor a sorozat limesz inferiorja:

$$\liminf a_n = \inf\{A_i\}$$

És a limesz szuperior:

$$\limsup a_n = \sup\{A_i\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy

$|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat divergens, és határértéke plusz végtelen, ha bármely $M > 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M < a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat divergens, és határértéke minusz végtelen, ha bármely $M < 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M > a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat oszcillálva divergens, ha nincs semmilyen határértéke, vagysi sem egy valós számhoz, sem plusz vagy minusz végtelenbe nem tart.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat szigorúan monoton nő, ha $0 < a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat szigorúan monoton csökken, ha $0 > a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton nő, ha $0 \leq a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton csökken, ha $0 \geq a_{n+1} - a_n$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorok

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$

Ha $|q| < 1$ akkor a mértani sor konvergens és összege

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $|q| \geq 1$ akkor a sor divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszegsorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$ monoton csökkenő sorozat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to 0$ pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$\sum(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól $a_n \leq b_n$ akkor

$\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ is konvergens

$\sum a_n$ divergens $\Rightarrow$ $\sum b_n$ is divergens

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol r a konvergenciasugár.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határérték és folytonosság

Az $f(x)$ függvény folytonos az a-ban, ha értelmezve van az a-ban, létezik és véges a határértéke az a-ban, és ami a lényeg:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a-ban, ha létezik véges határértéke az a-ban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Megszüntethető szakadás:

Ha létezik véges határérték az a-ban, de ez nem egyezik meg a függvényértékkel, akkor megszüntethető szakadása van.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

Nem megszüntehető szakadás, ugrás:

Ha a bal és jobb oldali határérték két különböző szám az a-ban, akkor a szakadás nem megszüntethető és ugrásnak hívjuk.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \text{másik szám} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Nem megszüntethető, nem véges szakadás:

Ha a bal és jobb oldali határérték nem is véges az a-ban, akkor pláne nem tehető folytonossá a függvény.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nem megszüntethető oszcilláló szakadás:

Végül meglehetősen patologikus esetek is vannak, amikor még csak jobb vagy bal oldali határérték sem létezik.

$$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

f és g deriválható függvények, és c valós szám esetén a deriválási szabályok:

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

A deriválási szabályok megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a trötek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorolni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvények közt fennálló azonosságok:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\cosh x$ függvény inverze:

$\text{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

A $\sinh x$ függvény inverze:

$\text{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

A $\tanh x$ függvény inverze:

$\text{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\text{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\text{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\text{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás alkalmazása

Legyen f és g deriválható az a szám környezetében (kivéve esetleg a-ban) és tegyük fel, hogy itt $g'(x) \neq 0$.

Ekkor, ha $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, ekkor a L'Hôpital-szabály (vagy L'Hospital-szabály) szerint:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$e^{-\infty} = 0 \quad e^{\infty} = \infty$$

$$\ln 0 = -\infty \quad \ln\infty = \infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{+0} = +\infty \quad \frac{1}{-0} = -\infty$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $f(x)$ k-szor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt k-adfokú Taylor polinomja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $f(x)$ akárhányszor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt Taylor sora:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az e^x, $\ln x$, $\sin x$ és $\cos x$ függvények Taylor sorai:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $f(x)$ egymás után k-szor folytonosan differenciálható az $[a,b]$ zárt intervallumon, és $k+1$-edszer differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon, akkor létezik olyan $c \in (a,b)$ amire

$$f(b) = T(b) + R(b) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozatlan Integrálás

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$-et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \ln |ax+b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} \, dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} \, dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) \, dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax+b) \, dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \, dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \, dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} \, dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int f^{\alpha} \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'\left(x\right) = F\left(g(x)\right) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnos az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \qquad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \qquad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\, dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}\, dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d}\, dx =$$

$$= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d}\, dx = \frac{a}{c}x + E\ln|cx+d|\frac{1}{c}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}\, dx \qquad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f\left(g(x)\right)\, dx \qquad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \qquad f = sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \qquad f = \sinh^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \qquad f = \cosh^2 u$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = A\int \frac{1}{ax+b}\,dx = A\ln|ax+b|\cdot\frac{1}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c}\,dx\right) =$$

$$= \frac{A}{2a}\left(\ln|ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)\cdot\sqrt{D}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az $u=\tan\frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozott Integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor aNewton Leibniz formula szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f $[a,b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \le I \le S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad m_i = \inf\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \sup\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha integráljuk a pozitív számegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} \text{ ha } \alpha < 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \ge 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ ha } \alpha > 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \le 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x-essel, akkor marad

Az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y-ossel, akkor marad

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Első lépés:

$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x, y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x, y)$

Második lépés:

$f'_x(x, y) = 0$

$f'_y(x, y) = 0$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét parciális derivált nulla, az $f(x, y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \cdots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű deriváltakból képzett mátrix, amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x,y) = c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort derivált-vektornak vagy másként gradiensnek hívjuk.

Íme a derivált-vektor:

$$\underline{f}'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad \text{röviden} \quad \underline{f}' = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

A derivált-vektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja az (x_0, y_0) pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{v}} = \underline{f}'(x_0, y_0) \cdot \underline{v}$$

(Itt $\underline{v}$ egységvektor)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \ldots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $F(x,y)=0$ egy egyváltozós implicit függvény, akkor deriváltja:

$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$ $\frac{\delta x}{\delta y}=-\frac{F_y'(x,y)}{F_x'(x,y)}$

Ha $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i, mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$\frac{\delta x_i}{\delta x_j}=-\frac{F_j'(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}{F_i'(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az x,y sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx=\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az x szerinti határokat adjuk meg és utána az y szerintit vagy fordítva.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mátrixok és vektorok

Egy nXk-as mátrix tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor amátrix összes elemét meg kell szorozni a számmal.

pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor amátrix minden elemét osztani kell a számmal.

pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

A mátrixok összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix szorzata akkor létezik, ha a bal oldali mátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali mátrix sorainak számával.

Ha az A mátrix m x n-es a B mátrix pedig n x k-s, akkor az eredménymátrix m x k-s lesz.

Az eredménymátrix i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali mátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali mátrix j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

pl.: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A mátrix összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kvadratikus mátrix négyzetes mátrix vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diagonális mátrix olyan kvadratikus mátrix, aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységmátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egységmátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

pl.: $I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz mátrix jele A^{-1} és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$A \cdot A^{-1} = I$ (jobb inverz)

$A^{-1} \cdot A = I$ (bal inverz)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

Pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

Pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

Pl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

Pl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A skaláris szorzat két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$

nem asszociatív: $\left(\underline{a}^T \cdot \underline{b}\right)^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot \left(\underline{b}^T \cdot \underline{c}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektor diadikus szorzata egy mátrix. Lássuk milyen.

Pl.: $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$ $\quad \underline{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

$\underline{a}\cdot\underline{b}^T=\begin{pmatrix}12 & 3 & 6\\8 & 2 & 4\\20 & 5 & 10\end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk jobbról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik oszlopát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk balról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik sorát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0,y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n}=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha a V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden V-beli $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorhoz hozzárendelünk egy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektort, ami szintén eleme V-nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ V-beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan $\underline{0}$ V-beli vektor, hogy bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely $\underline{v}_1$ V beli vektorra létezik olyan $-\underline{v}_1$ V-beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden V-beli $\underline{v}_1$ vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \underline{v}_1$ vektort, ami szintén V-beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V-beli vektorra és λ skalárra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárokra: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységszeres: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan $\lambda_i \neq 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy V vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok generátor-rendszert alkotnak, ha minden $\underline{w}$ vektor a V vektortérben előáll $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$ alakban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg R^*-ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek n-nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő függetlenvektorok maximális száma. R^3-ban a rang például maximum három lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A V vektortérnek W altere, ha $W \subset V$ és W maga is vektortér a V-beli műveletekre.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azonvektorok lineáris kombinációjaként.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris egyenletrendszerek

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x-ek együtthatóiból álló mátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlósmátrix alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak $\underline{e}$-s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázistranszformáció során fent maradt x-ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány x_i fönt marad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett mátrix pedig az A mátrix inverze lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Determináns, sajátérték

Ha az A egy $n\ x\ n$-es mátrix, akkor determinánsa

$$det(A)=\sum_{\forall p}(-1)^{I(p)}\cdot\prod_{i=1}^{n}a_{ip(i)}$$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 2x2-es mátrix determinánsa:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A)=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a\cdot d-b\cdot c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A 3x3-as mátrixok determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A)=-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A egy nxn-es mátrix, akkor determinánsa

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot\det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az A mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG<n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG=n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A mátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n \,)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix sarok főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarokmátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarokmátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + -+$ de mínusszal indul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A nxn-es szimmetrikus mátrix és $\underline{x}$ egy vektor R^n-ben, akkor a

$Q(x) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$

$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezésnél V_2-nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1-beli vektorok képe is nullvektor lesz. Ezen vektorok halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a mátrixok pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1-ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

φ^{-1} mátrixa $(\varphi)_b^{-1}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ lineáris leképezésnek a $\underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \dots\ \underline{b}_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1)\ \varphi(\underline{b}_2)\ \varphi(\underline{b}_3)\ \dots\ \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is V_1-ben, a leképezés mátrixa mindig egy nxn-esmátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak V_1-ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret $Hom(V_1, V_2)$-nek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A és B olyan mátrixok, hogy létezik egy C mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Differenciálegyenletek

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A szeparábilis differenciálegyenlet így néz ki:

$$f(x)\ dx = g(y)\ dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az y'-t lecseréljük arra, hogy $\frac{dy}{dx}$.

Aztán jön a szétválasztás: minden y-os dolgot a dy-os oldalra viszünk és minden x-eset a dx-es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy differenciálegyenlet homogén fokszámú, ha $y = ux$ helyettesítés után minden x-es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú differenciálegyenletek megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az $y(x) = xu(x)$ (röviden $y = xu$) helyettesítést, ekkor $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol y helyett most u-ra hajtunk. És amikor u már megvan, visszacsináljuk y-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ differenciálegyenlet akkor egzakt, ha $p_y'(x,y)=q_x'(x,y)$, röviden $\frac{\delta p}{\delta y}=\frac{\delta q}{\delta x}$.

Az egzakt egyenletek megoldása $F(x,y)=C$, ahol $F_x'(x,y)=p(x,y)$ és $F_y'(x,y)=q(x,y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x,y)=\int p(x,y)\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a differenciálegyenlet nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$\frac{\frac{\delta p}{\delta y}-\frac{\delta q}{\delta x}}{p}$ és $\frac{\frac{\delta p}{\delta y}-\frac{\delta q}{\delta x}}{q}$

Ha ezek közül az első csak y-t tartalmaz, vagy a második csak x-et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$u=e^{-\int f(y)\,dy}$ vagy $u=e^{\int g(x)\,dx}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy y', és van benne egy elsőfokú y.

$$y'+yP(x)=Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy $v(x)$ függvényt:

$$v=e^{\int P(x)\,dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet $v(x)$-el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v+yvP(x)=vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)'\,dx=\int vQ(x)\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy $C(x)$ függvény. És ezt a $C(x)$ függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban $C(x)$ helyére beírjuk, ami kijött.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósnak, mert a $P(x)$ függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk a.

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

A homogén egyenlet: $y' + ay = 0$

A homogén megoldás: $y_0 = Ce^{-ax}$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvénytől függ:

$Q(x) =$ másodfokú polinom: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$Q(x) =$ harmadfokú polinom: $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$Q(x) =$ exponenciális kifejezés: $y_p = Ae^{\alpha x}$

$Q(x) =$ szinusz vagy koszinusz: $y_p = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet partikuláris megoldásában szerepel $e^{\alpha x}$ és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} \left(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx \right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet: $ar^2 + br + c = 0$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} \left(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx \right)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$Q(x) =$ polinom: $y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$

$Q(x) =$ exponenciális kifejezés: $y_p = Ae^{\alpha x}$

$Q(x) =$ szinusz vagy koszinusz: $y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azon pontok halmazát, melyekben a megoldásfüggvények meredeksége egy adott számmal egyenlő, a differenciálegyenlet izoklinájának nevezzük.

Az $y' = f(x, y(x))$ izoklináinak egyenlete:

$$f(x, y(x)) = K$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot