MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEK 2 SZE tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 19.

Tartalomjegyzék

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$-et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \ln|ax+b| \frac{1}{a} + c$

$\int e^{ax+b} \, dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$

$\int A^{ax+b} \, dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$

$\int \cos(ax+b) \, dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \sin(ax+b) \, dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \, dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \, dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} \, dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$\int c \cdot f = c \cdot \int f$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$\int f + g = \int f + \int g$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnos az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$\int e^g \cdot g' = e^g + c \qquad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$

$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \qquad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$\int \frac{ax+b}{cx+d}\, dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}\, dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d}\, dx =$

$= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d}\, dx = \frac{a}{c}x + E\ln|cx+d|\frac{1}{c}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}\, dx \qquad \sqrt{cx+d} = u$

$\int f(g(x))\, dx \qquad g(x) = u$

$\sqrt{1-f} \qquad f = sin^2 u$

$\sqrt{1+f} \qquad f = \sinh^2 u$

$\sqrt{f-1} \qquad f = \cosh^2 u$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = A\int \frac{1}{ax+b}\,dx = A\ln|ax+b|\cdot\frac{1}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c}\,dx\right) =$$

$$= \frac{A}{2a}\left(\ln|ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)\cdot\sqrt{D}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az $u=\tan\frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozott integrálás, improprius integrál

Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor a Newton Leibniz formula szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f $[a,b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad m_i = \inf\{f(x),\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \sup\{f(x),\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha integráljuk a pozitív számegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} \text{ ha } \alpha < 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ ha } \alpha > 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Paraméteres síkgörbék

A ciklois egyenlete:

$$x = R(-\sin u + u) \qquad y = R(-\cos u + 1)$$

$$u = \frac{4}{R}t$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A paraméteres görbe egyenlete a görbén mozgó pont pillanatnyi koordinátáit írja le.

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

A paraméteres görbe deriválásával kapjuk a $v(t)$ sebességvektort, ami minden időpillanatban megadja a görbén mozgó P pont sebességének irányát és nagyságát:

$$v(t) = (x'(t), y'(t)) \qquad | v(t) | = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A görbe ívhossza a t_0 és t_1 időpillanatokhoz tartozó pontok között:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \ dt$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $r(t)$ paraméteres görbe első deriváltja a görbe érintővektora vagy más néven sebességvektora.

Hogyha ezt elosztjuk a saját hosszával, akkor egy egységnyi hosszú vektort kapunk, amit $\underline{T}$-vel jelölünk.

$$\underline{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $r(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a görbe gyorsulásvektora. Ha ezt elosztjuk a saját hosszával:

$$\underline{N}(t) = \frac{r''(t)}{|r''(t)|}$$

Az így keletkező egységnyi hosszú vektor a görbe főnormálisvektora.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Binormálisvektornak nevezzük a görbe sebességvektorával és gyorsulásvektorával alkotott szorzatot:

$$\underline{B}(t) = \underline{T}(t) \times \underline{N}(t)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{T}(t)$, $\underline{N}(t)$ és $\underline{B}(t)$ vektorok együttes elnevezése kísérő triéder.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $r(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a gyorsulást írja le. Ezek avektorok egy síkot feszítenek ki, ezt a síkot a görbe simulósíkjának nevezzük. A simulósík normálvektora éppen $r'(t) \times r''(t)$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A görbület azt írja le, hogy a simulósíkon belül milyen erősen kanyarodik a görbe. A térgörbék azonban nem csak a simulósíkon belül kanyarodnak, hanem közben ki is csavarodnak abból. Azt, hogy egy térgörbe éppen milyen ütemben csavarodik ki a simulósíkjából, a torzió írja le.

Hogyha egy görbe minden pontjában nulla a torzió, az annak a jele, hogy ez a görbe egy síkgörbe. Egy görbe akkor tud kilépni a simulósíkjából, ha a torzió legalább egy pontban nem nulla. Vagyis olyankor, ha a görbe elmozdul a binormális vektor irányában is. A torzió kiszámításához szükségünk van a görbe harmadik deriváltjára:

$$\tau = \frac{(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2} = \frac{\det\begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{bmatrix}}{\left|\det\begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix}\right|^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $r(t) = (x(t), y(t))$ paraméteres görbe görbülete:

$$\kappa = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{|x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}^3}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyha a görbének egy P pontjában létezik nem nulla görbülete, akkor azt a kört, amel aP-ben érinti a görbét és a görbülete megegyezik a görbe P-beli görbületével és a középpontja a görbe konkáv részében található, a görbe$P$ pontbeli simulókörének nevezzük.

A simulókör sugarát a görög ró betűvel jelöljük, és

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A simulókörök középpontjai által kirajzolt alakzatot evolutának hívjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az ellipszis fél-nagytengelyének hossza a, fél-kistengelyének hossza b, akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a hiperbola fél-nagytengelyének hossza a, fél-kistengelyének hossza b, akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Differenciálegyenletek

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A szeparábilis differenciálegyenlet így néz ki:

$$f(x)\ dx = g(y)\ dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az y'-t lecseréljük arra, hogy $\frac{dy}{dx}$.

Aztán jön a szétválasztás: minden y-os dolgot a dy-os oldalra viszünk és minden x-eset a dx-es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy differenciálegyenlet homogén fokszámú, ha $y = ux$ helyettesítés után minden x-es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú differenciálegyenletek megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az $y(x) = xu(x)$ (röviden $y = xu$) helyettesítést, ekkor $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol y helyett most u-ra hajtunk. És amikor u már megvan, visszacsináljuk y-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ differenciálegyenlet akkor egzakt, ha $p'_y(x,y) = q'_x(x,y)$, röviden $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$.

Az egzakt egyenletek megoldása $F(x,y) = C$, ahol $F'_x(x,y) = p(x,y)$ és $F'_y(x,y) = q(x,y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x,y) = \int p(x,y)\, dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a differenciálegyenlet nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p}$ és $\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$

Ha ezek közül az első csak y-t tartalmaz, vagy a második csak x-et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$u = e^{-\int f(y)\, dy}$ vagy $u = e^{\int g(x)\, dx}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy y', és van benne egy elsőfokú y.

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy $v(x)$ függvényt:

$$v = e^{\int P(x)\, dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet $v(x)$-el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)'\, dx = \int vQ(x)\, dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy $C(x)$ függvény. És ezt a $C(x)$ függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban $C(x)$ helyére beírjuk, ami kijött.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósnak, mert a $P(x)$ függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk a.

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

A homogén egyenlet: $y' + ay = 0$

A homogén megoldás: $y_0 = Ce^{-ax}$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvénytől függ:

$Q(x) =$ másodfokú polinom: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$Q(x) =$ harmadfokú polinom: $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$Q(x) =$ exponenciális kifejezés: $y_p = Ae^{\alpha x}$

$Q(x) =$ szinusz vagy koszinusz: $y_p = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet partikuláris megoldásában szerepel $e^{\alpha x}$ és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet általános alakja:

$ay'' + by' + cy = 0$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} \left(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx \right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet általános alakja:

$ay'' + by' + cy = Q(x)$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet: $ar^2 + br + c = 0$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} \left(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx \right)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$Q(x) =$ polinom: $y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$

$Q(x) =$ exponenciális kifejezés: $y_p = A e^{\alpha x}$

$Q(x) =$ szinusz vagy koszinusz: $y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorok & hatványsorok & Taylor-sorok

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$

Ha $|q| < 1$ akkor a mértani sor konvergens és összege

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $|q| \geq 1$ akkor a sor divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszegsorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$ monoton csökkenő sorozat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to 0$ pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$\sum(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól $a_n \leq b_n$ akkor

$\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ is konvergens

$\sum a_n$ divergens $\Rightarrow$ $\sum b_n$ is divergens

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol r a konvergenciasugár.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $f(x)$ k-szor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt k-adfokú Taylor polinomja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $f(x)$ akárhányszor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt Taylor sora:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az e^x, $\ln x$, $\sin x$ és $\cos x$ függvények Taylor sorai:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $f(x)$ egymás után k-szor folytonosan differenciálható az $[a,b]$ zárt intervallumon, és $k+1$-edszer differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon, akkor létezik olyan$c \in (a,b)$ amire

$$f(b) = T(b) + R(b) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a végtelen sorokat, amelyek így néznek ki, hatványsornak nevezzük:

$$\sum a_n(x-x_0)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mátrixok, vektorok, vektorterek

Egy nXk-as mátrix tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor amátrix összes elemét meg kell szorozni a számmal.

pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor amátrix minden elemét osztani kell a számmal.

pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

A mátrixok összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix szorzata akkor létezik, ha a bal oldali mátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali mátrix sorainak számával.

Ha az A mátrix m x n-es a B mátrix pedig n x k-s, akkor az eredmény mátrix m x k-s lesz.

Az eredmény mátrix i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali mátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali mátrix j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

pl.: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A mátrix összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kvadratikus mátrix négyzetes mátrix vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diagonális mátrix olyan kvadratikus mátrix, aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységmátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egységmátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

pl.: $I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz mátrix jele A^{-1} és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$A \cdot A^{-1} = I$ (jobb inverz)

$A^{-1} \cdot A = I$ (bal inverz)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

Pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

Pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

Pl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

Pl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A skaláris szorzat két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$

nem asszociatív: $\left(\underline{a}^T \cdot \underline{b}\right)^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot \left(\underline{b}^T \cdot \underline{c}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektor diadikus szorzata egy mátrix. Lássuk milyen.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk jobbról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik oszlopát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk balról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik sorát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha a V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden V-beli $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorhoz hozzárendelünk egy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektort, ami szintén eleme V-nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ V-beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan $\underline{0}$ V-beli vektor, hogy bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely $\underline{v}_1$ V beli vektorra létezik olyan $-\underline{v}_1$ V-beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden V-beli $\underline{v}_1$ vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \underline{v}_1$ vektort, ami szintén V-beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V-beli vektorra és λ skalárra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárokra: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységszeres: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan $\lambda_i \neq 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy V vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ vektorok generátor-rendszert alkotnak, ha minden $\underline{w}$ vektor a V vektortérben előáll $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$ alakban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ vektorok független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg R^*-ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek n-nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő független vektorok maximális száma. R^3-ban a rang például maximum három lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A V vektortérnek W altere, ha $W \subset V$ és W maga is vektortér a V-beli műveletekre.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azon vektorok lineáris kombinációjaként.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x-ek együtthatóiból álló mátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlósmátrix alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehajtjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak $\underline{e}$-s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázistranszformáció során fent maradt x-ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány x_i fönt marad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett mátrix pedig az A mátrix inverze lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések

Ha az A egy $n\ x\ n$-es mátrix, akkor determinánsa

$$det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}$$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 2x2-es mátrix determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A 3x3-as mátrixok determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A egy nxn-es mátrix, akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az A mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG<n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG=n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A mátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A)=X^{-1}\cdot A\cdot X$$

itt $X=\begin{pmatrix}\underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots\underline{v}_n\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A)=X^{-1}\cdot A\cdot X$$

itt $X=\begin{pmatrix}\underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots\underline{v}_n\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A)=X^{-1}\cdot A\cdot X$$

itt $X=\begin{pmatrix}\underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots\underline{v}_n\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix sarok főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarokmátrixok determinánsai.

Pl.: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 1\\ 4 & 7 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7\end{pmatrix}$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}=2\cdot 7-3\cdot 4=2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarokmátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + -+$ de mínusszal indul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A nxn-es szimmetrikus mátrix és $\underline{x}$ egy vektor R^n-ben, akkor a

$$Q(x) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezésnél V_2-nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1-beli vektorok képe is nullvektor lesz. Ezen vektorok halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a mátrixok pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1-ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

φ^{-1} mátrixa $(\varphi)_b^{-1}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ lineáris leképezésnek a $\underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \dots\ \underline{b}_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1)\ \varphi(\underline{b}_2)\ \varphi(\underline{b}_3)\ \dots\ \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is V_1-ben, a leképezés mátrixa mindig egy nxn-es mátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak V_1-ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret $Hom(V_1, V_2)$-nek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A és B olyan mátrixok, hogy létezik egy C mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x-essel, akkor marad

Az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y-ossal, akkor marad

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Első lépés:

$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x, y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x, y)$

Második lépés:

$f'_x(x, y) = 0$

$f'_y(x, y) = 0$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét parciális derivált nulla, az $f(x, y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \cdots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű deriváltakból képzett mátrix, amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x,y)=c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0,y_0,z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort derivált-vektornak vagy másként gradiensnek hívjuk.

Íme a derivált-vektor:

$$\underline{f}'(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} \quad \text{röviden} \quad \underline{f}' = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

A derivált-vektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja az (x_0,y_0) pontban:

$$\frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta \underline{v}} = \underline{f}'(x_0,y_0) \cdot \underline{v}$$

(Itt $\underline{v}$ egységvektor)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $F(x,y)=0$ egy egyváltozós implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad \frac{\delta x}{\delta y}=-\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}$$

Ha $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i, mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j}=-\frac{F'_j(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}{F'_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kettős és hármas integrál

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dxdy$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dxdy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az x szerinti határokat adjuk meg és utána az y szerintit vagy fordítva.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A polárkoordinátás helyettesítés egy olyan helyettesítés, ami remekül alkalmazkodik a kör tulajdonságaihoz. A dolog lényege, hogy a körben a hagyományos x és y koordináták helyett új koordinátákat vezetünk be.

Az egyik azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk a kör középpontjától és ezt r-nek nevezzük.

A másik pedig egy forgásszög, és jele θ.

Az új koordinátákat polárkoordinátáknak nevezzük, a módszert pedig polárkoordinátás helyettesítésnek. A kapcsolat a régi és az új koordináták között a következő:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

A polárkoordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek. A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int\int_D f(x,y)\ dydx = \int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\ drd\theta$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A henger-koordináták:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

A henger-koordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek.

A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\ dxdydz = \int\int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\ drd\theta dz$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A polárkoordináták háromdimenziós változatát gömbi koordinátáknak nevezzük.

Az r azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk az origótól, a φ és θ pedig két forgás-szög.

A régi x, y, z és az új gömbi koordináták közti kapcsolat:

$$x = r \sin\varphi \cos\theta \quad y = r \sin\varphi \sin\theta \quad z = r \cos\varphi$$

A gömb koordinátás helyettesítés:

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dx dy dz = \int\int\int_D f\left(r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi\right) r^2 \sin\varphi \, dr d\theta d\varphi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot