MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

ADATELEMZÉS 2 tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 11.

Tartalomjegyzék

Kombinatorika..... **2**

Valszám alapok, klasszikus valszám..... **4**

Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel..... **5**

Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény..... **6**

Várható érték és szórás..... **9**

Markov és Csebisev egyenlőtlenségek..... **10**

A binomiális eloszlás és a hipergeometriai eloszlás..... **11**

Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások..... **13**

Becslések..... **16**

Hipotézisvizsgálat..... **23**

Regressziószámítás..... **28**

Idősorok..... **34**

Kombinatorika

Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli permutációján az n különböző elem egy sorba rendezését értjük.

n darab különböző elem permutációinak száma:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

n faktoriálisán az n-nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész számok szorzatát értjük.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

pl.:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$1! = 1$$

Továbbá definíció szerint $0! = 1$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.

n darab különböző elemből kiválasztott k darab elem variációinak száma:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

n darab különböző elem közül kiválasztott k darab elem kombinációinak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n elem között van $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését ismétléses permutációnak nevezzük.

n elem közötti $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező ismétléses permutációinak száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha kör alakban helyezünk el n különböző elemet és azok sorrendjét vizsgáljuk, akkor ciklikus permutációról beszélünk.

n darab különböző elem ciklikus permutációinak száma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Valszám alapok, klasszikus valszám

Eseményeknek nevezzük a valószínűségi kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.

Megkülönböztetünk elemi eseményeket, ilyen például, hogy egy dobókockával 1-est dobunk. Vannak azonban olyan események is amik több elemi eseményből épülnek fel, ilyen például az, hogy párosat dobunk.

Az eseményeket az ABC nagybetűivel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az esemény valószínűségét úgy kaphatjuk meg, hogy megszámoljuk hány elemi eseményből áll és ezt elosztjuk az összes elemi esemény számával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B eseményt egymástól függetlennek nevezzük, ha teljesül rájuk, hogy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B eseményt kizárónak nevezünk, ha

$$A \cap B = \emptyset$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény biztosan bekövetkezik:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges esemény, akkor

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Bayes tételt akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett (B_k) esemény valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett (A) tükrében.

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges esemény, akkor bármely B_k eseményre

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Folytonosnak nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik folytonos mennyiségeket mérnek, ilyen például az idő, a távolság. Ebben az esetben az eloszlás függvény is mindig folytonos függvény lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Diszkrétnek nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik megszámlálhatóan sok értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy vagy véges sokat, vagy végtelent, de úgy, hogy fel tudjuk sorolni az értékeit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(X < x)$$

Ha az X valószínűségi változó diszkrét és értékei $X = a, X = b, X = c$ meg ilyenek, akkor az eloszlásfüggvény mindig egy lépcsőzetes függvény, ami minden számnál pontosan akkorát ugrik, mint az adott szám valószínűsége, amíg el nem érjük az 1-et.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{ha } x \leq a \\ P(X = a) \quad \text{ha } a < x \leq b \\ P(X = a) + P(X = b) \quad \text{ha } b < x \leq c \\ \dots \\ 1 \end{cases}$$

Ha az X valószínűségi változó folytonos, akkor az a és b számok között bármilyen valós értéket fölvehet. Ilyenkor az eloszlásfüggvény is folytonos, ami a-ig nullát vesz föl, a és b közt növekszik és b után végig egyet vesz föl.Vagyis ahol az X valószínűségi változó működik, ott a függvény életre kel, előtte és utána pedig hibernált állapotban van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sűrűségfüggvény úgy működik, hogy a valószínűségeket a görbe alatti területek adják meg. Az eloszlásfüggvény jele $F(x)$ volt, a sűrűségfüggvény jele $f(x)$. Az $a < X < b$ valószínűség éppen a görbe alatti terület a-tól b-ig.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ha az $X < a$ valószínűséget szeretnénk kiszámolni:

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

Ha a $b < X$ valószínűséget:

$$P(b < X) = \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

Ha ezt a három területet összeadjuk, akkor éppen a teljes görbe alatti területet kapjuk, ami a 100%-ot jelenti, így hát ez a terület éppen 1.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

nem negatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1. $\lim_{-\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{\infty} F(x) = 1$
3. monoton nő
4. balról folytonos

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
2. nem negatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

$$P(b < X) = 1 - F(b) = \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az X valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényéből úgy kapjuk meg az $f(x)$ sűrűségfüggvényét, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt deriváljuk, azaz:

$$F'(x) = f(x)$$

Ha az X valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségi függvényét ismerjük, és meg akarjuk adni az $F(x)$ eloszlásfüggvényét, akkor azt pedig így tehetjük:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Várható érték és szórás

A várható érték jele $E(X)$.

Diszkrét esetben úgy kell kiszámolni, hogy

$$E(X) = \sum X_i P(X_i)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A szórás azt mutatja meg, hogy a várható érték körül milyen nagy ingadozásra számíthatunk.

Jele: $D(X)$

Kiszámításának módja diszkrét esetben:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Folytonos valószínűségi változók esetén a várható érték:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Folytonos valószínűségi változó esetén a szórást ugyanúgy kell számolni, mint diszkrétvalószínűségi változó esetén:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Markov és Csebisev egyenlőtlenségek

A Markov-egyenlőtlenség egy nagyon egyszerű dolgot állít. Az, hogy az X valószínűségi változó sokkal nagyobb legyen a várható értéknél nem túl valószínű:

$$P(X \geq t \cdot E(X)) \leq \frac{1}{t}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Csebisev egyenlőtlenség arról szól, hogy a várható értéktől való eltérés nem lehet túl nagy.

Ha ez az eltérés nagyobb, mint a szórás t-szerese, akkor ennek a valószínűsége kicsi:

$$P(|X - E(X)| \geq t \cdot D(X)) \leq \frac{1}{t^2}$$

Ha az eltérés kisebb, mint a szórás t-szerese, akkor ennek valószínűsége nagy:

$$P(|X - E(X)| < t \cdot D(X)) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy esemény bekövetkezésének elméleti valószínűsége p, akkor minél többször végezzük el a kísérletet, a relatív gyakoriság és az elméleti valószínűség eltérése annál kisebb lesz.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \qquad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A binomiális eloszlás és a hipergeometriai eloszlás

Ezt a képletet hívjuk binomiális eloszlásnak:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Visszatevéses mintavételről beszélünk, ha egy p valószínűségű elem többszöri kihúzásának esélyét vizsgáljuk úgy, hogy ha kihúzunk egy ilyen elemet, akkor ezt követően azt visszarakjuk.

Például ha azt vizsgáljuk, hogy egy kosárban van 8 piros és 5 kék golyó, és mennyi a valószínűsége, hogy háromszor húzva két piros és egy kék golyót húznánk úgy, hogy a kihúzott golyókat mindig visszatesszük, akkor az egy visszatevéses mintavétel.

A visszatevées mintavételhez kapcsolódó eloszlás a binomiális eloszlás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A visszatevés nélküli mintavétel tipikus példája, hogy van egy doboz, benne N darab elem. Közülük K darab valamilyen tulajdonságú, az egyszerűség kedvéért hívjuk selejtesnek. Mondjuk sárga vagy szép vagy ronda. Kihúzunk n darab elemet, és ez a képlet meg fogja nekünk mondani, hogy mekkora az esélye, hogy közülük k darab a vizsgált tulajdonságú:

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

De vannak olyan esetek, amikor a visszatevés nélküli mintavételnél másik képletet kell használnunk. Ezt a másik képletet binomiális eloszlásnak nevezzük, és olyankor használjuk, amikor a selejtek száma helyett csak a selejtek arányát ismerjük.

Ez a binomiális eloszlás képlete:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

És, hogy mi alapján döntjük el, hogy a két képlet közül melyiket kell használni? A dolog nagyon logikus, nézd meg a kapcsolódó epizódot és minden világos lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hipergeometriai eloszlás a visszatevés nélküli mintavételhez kapcsolódó eloszlás, képlete pedig:

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások

A hipergeometriai eloszlás egy diszkrét eloszlás.

Ismert, hogy mennyi az összes elem és az összes selejt, vagyis N, K és n.

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A hipergeometriai eloszlás várható értéke:

$$E(X)=n\frac{K}{N}$$

A hipergeometriai eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{n\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A binomiális eloszlás egy diszkrét eloszlás.

Csak valami %-os izé ismert, a várható érték, az átlag, az arány, a valószínűség, továbbá X korlátos diszkrét valószínűségi változó.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

A binomiális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=np$$

A binomiális eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Poisson eloszlás egy diszkrét eloszlás, ahol előre ismert a várható érték, és a valószínűségi változó nem korlátos, vagyis tetszőleges bármilyen nagy érték is lehet.

Például valamilyen anyagban a hibák száma, vagy egy adott idő alatt bekövetkező események száma. APoisson eloszlásos feladatokban általában valamilyen százalék vagy arány vagy várható érték vagy átlag vagy valószínűség van megadva. Mondjuk egy könyvben az oldalak 80%-ában nincs hiba, vagy az 20 méter hosszú ruhaszövetek harmadában nincs hiba, vagy egy üzletben óránként várhatóan 13 vevő érkezik, vagy egy bankban percenként átlag 24 tranzakció történik, vagy 0,2 a valószínűsége, hogy 10 perc alatt nem érkezik segélyhívás. Ezek mind Piosson eloszlások, ahol az X nem korlátos diszkrét valószínűségi változó.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

A Poisson eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\lambda$$

A Poisson eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{\lambda}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\leq 0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{ha } 0<x\end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\leq 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } 0<x\end{cases}$$

Az exponenciális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Az exponenciális eloszlás szórása:

$$D(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenletes eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\leq A\\ \frac{x-A}{B-A} & \text{ha } A<x\leq B\\ 1 & \text{ha } B<x\end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{B-A} & \text{ha } A<x\leq B\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\frac{A+B}{2}$$

Az egyenletes eloszlás szórása:

$$D(X)=\frac{B-A}{\sqrt{12}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A normális eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

A normális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\mu$$

A normális eloszlás szórása:

$$D(X)=\sigma$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Becslések

Olyan esetekben, amikor valamiért nem tudjuk vagy nem akarjuk a teljes sokaságot megvizsgálni, hogy meghatározzuk a fontosabb statisztikai mutatóit, becslést alkalmazunk. A becslés lényege, hogy egy minta alapján próbálunk ezekre a mutatókra következtetni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A megbízhatósági szintet konfidencia szintnek nevezzük. A konfidencia szint szokásos jelölése $1-\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $1-\alpha$ megbízhatósági szinthez, vagy másként konfidencia szinthez tartozó konfidencia intervallumok azok az intervallumok, amik a sokasági átlagot $1-\alpha$ valószínűséggel tartalmazzák.

A konfidencia intervallum végpontjai:

$\overline{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ahol

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$\sigma =$ a teljes sokaság szórása

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a standard normális eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó Z értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\overline{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ahol

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$\sigma =$ a teljes sokaság szórása

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a standard normális eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó Z értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A FAE minta azt jelenti, hogy a mintavétel során bármely mintaelemet azonos eséllyel választunk ki. Ilyen a visszatevéses mintavétel, vagy pedig abban az esetben ha az alapsokaság elemszáma nagyon nagy, akkor a visszatevés nélküli mintavétel is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\overline{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$s =$ a teljes sokaság szórása, a sokasági szórás nem ismert

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a t-eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\overline{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a standard normális eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó Z értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(v)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}(v)}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$s =$ a minta szórása, a sokasági szórás nem ismert

$\chi^2(v)$ pedig a khi-négyzet eloszlás megfelelő értéke

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az EV-minta abban különbözik a FAE-mintától, hogy a kiválasztott mintaelemek nem függetlenek egymástól.

Ez olyankor fordulhat elő, ha a teljes sokaság mérete viszonylag kicsi a minta elemszámához képest. EV-minták esetén tehát a minta fontos jellemzőjévé válik, hogy mekkora a teljes sokaság, amelynek elemszámát N jelöli.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\overline{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1-\frac{n}{N}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$N =$ a teljes sokaság elemszáma

$s =$ a minta szórása

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a t-eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\overline{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \cdot \sqrt{1-\frac{n}{N}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$N =$ a teljes sokaság elemszáma

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a standard normális eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó Z értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a teljes sokaságot felosztjuk viszonylag homogén rétegekre, és a mintát is ezen a rétegek szerint vizsgáljuk, a variancia csökkenthető.

$\hat{\overline{x}}_R \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\hat{\overline{X}}_R}$

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$n_j =$ a minta j-edik rétegének elemszáma

$N =$ a teljes sokaság elemszáma

$N_j =$ a teljes sokaság j-edik rétegének elemszáma

$W_j =$ a teljes sokaság j-edik rétegének a teljes sokasághoz viszonyított aránya

$s_j =$ a minta j-edik rétegének szórása

$\hat{\overline{X}}_R = \sum_{j=1}^{M} W_j \overline{x}_j$

$s^2_{\hat{\overline{X}}_R} = \sum_{j=1}^{M} W_j^2 \frac{s_j^2}{n_j}\left(1-\frac{n_j}{N_j}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kétmintás becslésekre akkor van szükség, amikor kétsokaság valamilyen paraméterét, leginkább az átlagát szeretnénk összehasonlítani.

A kétmintás becslések lehetnek független mintás becslések vagy páros mintás becslések.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha mindkét sokaság közel normális eloszlású, akkor az átlagok különbségének becslésére ez a formula van forgalomban.

$d \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_d$ ahol $d = \overline{x} - \overline{y}$

$s_d = s_c \cdot \sqrt{\frac{1}{n_Y} + \frac{1}{n_X}}$ itt $s_c^2 = \frac{(n_X-1)s_X^2+(n_Y-1)s_Y^2}{n_X+n_Y-2}$

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{x} =$ az egyik minta átlaga

$\overline{Y} =$ a másik minta átlaga

$n_X =$ az egyik minta elemszáma

$n_Y =$ a másik minta elemszáma

A szabadságfok $v = n_X + n_Y - 2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy becslést torzítatlannak nevezünk, ha az egyes mintákból kapott becslések várható értéke megegyezik a becsülni kívánt mennyiséggel.

Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy a becslés során kapott értékek a becsülni kívánt érték körül ingadoznak, és ez az ingadozás szimmetrikus. A torzítatlan becsléseket mindig előnyben részesítjük a torzítottakkal szemben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kérdés az, hogy ha egy sokasági jellemzőre több becslés jöhet szóba, hogyan válasszunk közülük, vagyis mikor tekintünk egy becslést jónak, kettő közül melyiket tekintjük jobbnak és kijelenthetjük-e valamelyikről, hogy a legjobb?

Két alapvető szempont alapján szoktuk a becsléseket versenyeztetni. Az egyik, a már jól ismert torzítatlanság, vagyis a becslésnek az a tulajdonsága, hogy az összes lehetséges mintán vett becslések átlaga megegyezik a becsülni kívánt sokasági jellemzővel. A másik az úgynevezett minimális variancia kritérium.

A minimális variancia kritérium azt jelenti, hogy ha van két torzítatlan becslésünk, akkor a kettő közül azt tekintjük jobbnak, aminek az összes mintán vett értékeinek varianciája kisebb.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + (E(\theta) - \theta)^2$$

Az első tag a varianciát, a második tag a várható értéktől való eltérést, vagyis a torzítottságot méri. Ha a becslés torzítatlan, $E(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$ így ez a második tag nulla. Két becslés közül azt részesítjük előnyben, amelyre MSE kisebb.

Az $E(\hat{\theta}) - \theta$ különbségre, vagyis a torzítás mértékére az angol bias szó alapján a$Bs\hat{\theta}$ jelölés van forgalomban. Használatos tehát az

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + Bs^2(\hat{\theta})$$

Képlet is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Eddigi vizsgálódásaink egyik legfontosabb eredménye a mintaátlagot eloszlásának jellemzése. Ha a teljessokaság átlaga μ és szórása pedig σ, akkor az ebből vett n elemű minták átlagai olyan eloszlással helyezkednek el, aminek átlaga szintén μ, a szórása pedig $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ezt az utóbbit a minta standard hibájának szokás nevezni. A standard hiba tehát azt mondja meg, hogy a mintaátlagok mekkora szórással ingadoznak a tényleges sokasági átlag körül.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mintavételi hibának azokat a hibákat nevezzük, amik kimondottan azért fordulnak elő, mert nem tudjuk, vagy nem akarjuk a teljes sokaságot vizsgálni. A mintavételi hiba tehát a sokaság eloszlásán és a mintavételi eljáráson kívül főleg a minta elemszáma határozza meg. Mivel pedig ezeket általában már a mintavételt megelőzően ismerjük, a mintavételi hibának megvan az a kellemes tulajdonsága, hogy legtöbbször előre megállapítható. Vagyis még el sem végeztük a mintavételt, de már tudjuk, hogy mekkora lesz a mintavétel során elkövetett hiba. Ez a kellemes tulajdonság lesz a kiindulópont a becslések és később a hipotizésvizsgálatok elméletének kiépítésében.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin\alpha = \sin\left(\pi - \alpha\right)$$

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad -\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\cos\alpha = \cos\left(\pi - \alpha\right)$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának x koordinátáját nevezzük az α szög koszinuszának, és így jelöljük: $\cos\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának y koordinátáját nevezzük az α szög szinuszának, és így jelöljük: $\sin\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy α szög tangense az α szög szinuszának és koszinuszának hányadosával egyenlő:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad k \in Z$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hipotézisvizsgálat

Az elfogadási tartomány az a tartomány, ahová ha a próba értéke kerül, akkor a nullhipotézist elfogadjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kritikus tartomány az a tartomány, ahová ha a próba értéke kerül, akkor a nullhipotézist elvetjük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A szignifikanciaszint a hibás döntés valószínűsége.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

ELSŐ LÉPÉS: A HIPOTÉZIS MEGFOGALMAZÁSA

Minden hipotézisvizsgálat két egymásnak ellentmondó felvetés felírásával kezdődik. Az egyiket nullhipotézisnek nevezzük és H_0-al jelöljük, a másikat pedig ellenhipotézisnek és jele H_1.

MÁSODIK LÉPÉS: A PRÓBAFÜGGVÉNY KIVÁLASZTÁSA

A próbafüggvények kiválasztása magától a hipotézistől, illetve a mintavétel módjától is függ.

HARMADIK LÉPÉS: SZIGNIFIKANCIASZINT ÉS KRITIKUS TARTOMÁNY

Ha a próbafüggvény értéke az elfogadási tartományba fog esni, akkor ezt a tényt a nullhipotézist igazoló jelnek fogjuk tekinteni. Hogyha pedig a kritikus tartományba, akkor a nullhipotézist elvetjük.

NEGYEDIK LÉPÉS: MINTAVÉTEL ÉS DÖNTÉS

Ha a mintavétellel kapott eredményünk szerint a próbafüggvény az elfogadási tartományba esik, akkor a H_0 nullhipotézist tekintjük igaznak, a H_1 ellenhipotézist pedig elvetjük.

Ha viszont a próbafüggvény a minta alapján a kritikus tartományba esik, akkor a H_0 nullhipotézist vetjük el és a H_1 ellenhipotézist tekintjük igaznak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokaság normális eloszlású, szórása σ, H_0 a sokaság átlagára vonatkozik, a minta elemszáma n.

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokaság normális eloszlású, szórása nem ismert, H_0 a sokaság átlagára vonatkozik, a minta elemszáma n.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokaság tetszőleges eloszlású, szórása nem ismert, H_0 a sokaság átlagára vonatkozik, a minta n elemű, elemszáma nagy.

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokaság tetszőleges eloszlású, H_0 a sokasági arányra vonatkozik, a minta n elemű, elemszáma nagy.

$$Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokaság normális eloszlású, H_0 a sokasági szórásra vonatkozik, a minta n elemű.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokaság eloszlására irányuló vizsgálat.

H_0: mindegyik osztályköz valószínűsége egy adott eloszlásnak megfelelő érték, vagyis minden i-re az i-edik osztályköz valószínűsége a P_i érték.

Az ellenhipotézis pedig, H_1: van olyan osztályköz, ami nem az adott eloszlásnak megfelelő P_i érték. A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. A minta elemszáma n.

$$\chi^2(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{nP_i}$$

ahol a v szabadságfok: $v = k - b - 1$.

Itt $k =$ az osztályközök száma és $b =$ az adott eloszlás azon paramétereinek száma, amit a mintából becsléssel határozunk meg.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokaságon belül két ismérv függetlenségére irányuló vizsgálat. H_0: a két ismérv független, az ellenhipotézis pedig, H_1: a két ismérv közti kapcsolat sztochasztikus vagy függvényszerű.

A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. A minta elemszáma n, a minta alapján készített kontingencia tábla sorainak száma r, oszlopainak száma c.

$$\chi^2(v) = \sum \frac{(n_{ij}-n^*_{ij})^2}{n^*_{ij}}$$

ahol a v szabadságfok $v = (r-1)(c-1)$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két sokaságban valamely változó eloszlásának egyezőségére irányuló vizsgálat. H_0: a két sokaságban az eloszlás egyező, az ellenhipotézis pedig, H_1: a két eloszlás nem egyező.

A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. Mintát ezúttal mindkét sokaságból veszünk, az X sokaságból vett minta elemszáma n_X az Y sokaságból vett mintáé n_Y mindkét mintában az osztályközök száma k.

\(\chi^2(v) = n_X \cdot n_Y \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_{Xi}+n_{Yi}} \cdot \left(\frac{n_{Xi}}{n_X} - \frac{n_{Yi}}{n_Y} \right)^2 \)

ahol a v szabadságfok $v = k-1$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mindkét sokaság normális eloszlású, szórásaik σ_X és σ_Y.

$$Z = \frac{(\bar{y}-\bar{x})-\delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}+\frac{\sigma_X^2}{n_X}}}$$

A nullhipotézis: H_0: $\mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték. A minták elemszáma n_X és n_Y.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A két sokaság normális eloszlású és szórásaik egyformák.

$$t(v) = \frac{(\bar{y}-\bar{x})-\delta_0}{s\cdot\sqrt{\frac{1}{n_Y}+\frac{1}{n_X}}}$$

itt $s^2 = \frac{(n_X-1)s_X^2+(n_Y-1)s_Y^2}{n_X+n_Y-2}$

A nullhipotézis H_0: $\mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték.

A minták elemszáma n_X és n_Y, szórása s_X és s_Y, a szabadságfok $v = n_Y + n_X - 2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A két sokaság eloszlása és szórása nem ismert, mindkettő szórása véges, és mindkét minta elemszáma elég nagy.

$$Z = \frac{(\overline{y}-\overline{x})-\delta_0}{\sqrt{\frac{s_Y^2}{n_Y}+\frac{s_X^2}{n_X}}}$$

A nullhipotézis $H_0: \mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték.

A minták elemszáma n_X és n_Y, szórása s_X és s_Y.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két sokaság szórásának összehasonlítására irányuló próba, ha mindkét sokaság normális eloszlású. A nullhipotézis $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \qquad F_{1-p}(v1;v2) = \frac{1}{F_p(v_2;v_1)}$$

Az F-eloszlás két szabadságfoka

$v_1 = n_1 - 1$ és $v_2 = n_2 - 1$

Bal oldali kritikus érték: $\frac{1}{F_{1-\alpha}(v_2;v_1)}$

Jobb oldali kritikus érték: $F_{1-\alpha}(v_1;v_2)$

Kétoldali kritikus érték:

$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_2;v_1)}$ és $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1;v_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Több sokaság várható értékének összehasonlítására vonatkozó próba, ha mindegyik sokaság normális eloszlású és azonos szórású.

A H_0 nullhipotézis: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_M = \mu$, vagyis az, hogy a várható értékek az összes sokaságra (M db) megegyeznek, míg az ellenhipotézis az, hogy van olyan μ_j amire $\mu_j \neq \mu$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Bartlett-próba több sokaság szórásának összehasonlítására vonatkozó próba, ha mindegyik sokaság normális eloszlású.

A H_0 nullhipotézis: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \cdots = \sigma_M = \sigma$, vagyis az, hogy az összes sokaság (M db.) szórása megegyezik, míg az ellenhipotézis az, hogy van olyan σ_j, amire $\sigma_j \neq \sigma$.

$$SSB = \sum_{j=1}^{M}(n_j - 1)s_j^2 \qquad s_b = \frac{SSB}{n-M}$$

A próbafüggvény

$$B^2 = \frac{1}{c}\left(v \cdot \ln s_b^2 - \sum_{j=1}^{M} v_j \ln s_j^2\right)$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(M-1)}\left(\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{v_j} - \frac{1}{v}\right)$$

Jobb oldali kritikus érték: $\chi^2_{1-\alpha}(M-1)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Regressziószámítás

A regresszió egyenes egyenlete:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x$$

Ahol $b_1 = \frac{\sum dx \cdot dy}{\sum d^2x}$ és $b_0 = \overline{y} - b_1 \cdot \overline{x}$

A regressziós egyenes egyenletében szereplő regressziós paraméterek közül b_1 az egyenes meredeksége. A b_0 érték kevésbé jelentős, ez azt adja meg, hogy a magyarázó változó nulla értékéhez milyen y érték tartozik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A regressziós egyenes egyenlete $\hat{y} = \hat{b_0} + \hat{b_1} \cdot x$

Ez egy lineáris függvény, ami mindegyik x-hez hozzárendel valamilyen y-t. Ezek általánan eltérnek a valódi y-októl. Ezeket az eltéréseket reziduumoknak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A reziduumokból képzett mutató az úgynevezett SSE, jelentése sum of squares of the errors vagyis eltérés-négyzetösszeg.

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Ha a regresszió tökéletesen illeszkedik, akkor az $e_i = y_i - \hat{y}_i$ különbségek mindegyike 0, így SSE=0. Ha az illeszkedés nem tökéletes, akkor SSE egy pozitív érték, ami az illeszkedés pontatlanságát méri.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az SSE értékeit elosztjuk a megfigyelt pontok számával és a kapott eredménynek vesszük a gyökét, akkor kapjuk a reziduális szórást:

$$s_e^* = \sqrt{\frac{SSE}{n}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az illeszkedés egy mérőszáma a lineáris korrelációs együttható:

$$r = \frac{\sum dx \cdot dy}{\sqrt{\sum d^2x \cdot \sum d^2y}}$$

A lineáris korrelációs együttható azt méri, hogy x és y között milyen szoros lineáris kapcsolat van. Értéke mindig $-1 \leq r \leq 1$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A magyarázóerőt méri az úgynevezett determinációs együttható, melynek jele R^2. Ez a kétváltozós lineáris modell esetében megegyezik r^2-tel.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Itt SSE az eltérés-négyzetösszeg, míg SSR az úgynevezett regressziós, vagy magyarázó négyzetösszeg, SST pedig a teljes négyzetösszeg, a köztük lévő kapcsolat pedig...

$$SST = \sum d^2y \quad SSR = \sum(\hat{y}_i - \overline{\hat{y}})^2 = b_1^2 \sum d^2x \quad SSE = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum e_i^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A regresszió egyenes egyenlete:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 \cdot x^{\hat{b}_1}$$

Amiből

$$\lg \hat{y} = \lg \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot \lg x$$

Ahol $\hat{b}_1 = \frac{\sum d\lg x \cdot d\lg y}{\sum d^2 \lg x}$ és $\lg \hat{b}_0 = \overline{\lg y} - \overline{\lg x} \cdot \hat{b}_1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A regresszió egyenes egyenlete:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 \cdot \hat{b}_1^x$$

Amiből

$$\lg \hat{y} = \lg \hat{b}_0 + x \cdot \hat{b}_1$$

Ahol $\lg \hat{b}_1 = \frac{\sum dx \cdot d\lg y}{\sum d^2 x}$ és $\lg \hat{b}_0 = \overline{\lg y} - \overline{x} \cdot \lg \hat{b}_1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elaszticitás két összefüggő jelenség közti kapcsolat.

Lineáris modellben: $El(\hat{y}, x) = \frac{\hat{b}_1 x}{\hat{y}} = \frac{\hat{b}_1 x}{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x}$

Hatványkitevős modellben: $El(\hat{y}, x) = \hat{b}_1$

Exponenciális modellben: $El(\hat{y}, x) = x \cdot \ln \hat{b}_1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

I. A magyarázó változók nem valószínűségi változók.

II. A magyarázó változók lineárisan független rendszert alkotnak.

III. Az eredményváltozó közel lineáris függvénye a magyarázó változónak.

IV. Az ϵ hibatag feltételes eloszlása normális, várható értéke nulla.

V. Az ϵ hibatag különböző x-ekhez tartozó értékei korrelálatlanok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A paraméterek becslése:

$$\hat{b}_i \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot (n-k-1) \cdot s_{\hat{b}_i}$$

A regresszió becslése:

$$\hat{y}_* \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot (n-k-1) \cdot s_{\hat{y}_*}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin\alpha = \sin\left(\pi - \alpha\right)$$

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad -\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\cos\alpha = \cos\left(\pi - \alpha\right)$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának x koordinátáját nevezzük az α szög koszinuszának, és így jelöljük: $\cos\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának y koordinátáját nevezzük az α szög szinuszának, és így jelöljük: $\sin\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy α szög tangense az α szög szinuszának és koszinuszának hányadosával egyenlő:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad k \in Z$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A többváltozós regressziós modelleket olyankor alkalmazzuk, amikor az eredményváltozó alakulását több magyarázó változó tükrében vizsgáljuk.

A többváltozós lineáris regresszió egyenlete:

$$y = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 + \cdots + \hat{b}_k x_k + \epsilon$$

Az y eredményváltozó itt k darab magyarázó változótól és a hibatagtól függ.

A képletben a $\hat{b}_0$ paraméter a tengelymetszet, a többi $\hat{b}_i$ paraméter pedig azt jelenti, hogy az i-edik magyarázó változó egy egységgel történő változása, mennyivel változtatja az $\hat{y}$ értéket, ha a többi magyarázó változót rögzítjük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kétváltozós esethez hasonlóan a korreláció itt is a változók közti kapcsolat szorosságát írja le, csakhogy itt egy fokkal rosszabb a helyzet, ugyanis most bármely két változó korrelációját vizsgálhatjuk. Ezt tartalmazza a korrelációmátrix.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & \dots & r_{yk} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{ky} & r_{k1} & r_{k2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Itt r_{ij} az x_i és az x_j magyarázó változók közti korrelációt írja le, tehát például r_{12} az x_1 és az x_2 közti korrelációt jelenti.

r_{iy} pedig az x_i magyarázó változó és az y eredményváltozó közti kapcsolatot jelenti.

Mivel $r_{ij} = r_{ji}$ a korreláció-mátrix szimmetrikus. Az áttekinthetőbb felírás kedvéért a felső háromszöget el is szokták hagyni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lineáris regresszió egyenlete: $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 + \cdots + \hat{b}_k x_k$

A tesztelés úgy zajlik, hogy nullhipotézisnek tekintjük a $H_0 : b_i = 0$ feltevést, ellenhipotézisnek pedig azt, hogy $H_1 : b_i \neq 0$.

A nullhipotézis azt állítja, hogy a modellben a b_i paraméter szignifikánsan nulla, vagyis az i-edik magyarázó változó felesleges, annak hatása az eredményváltozóra nulla. Az ellenhipotézis ezzel szemben az, hogy $b_i \neq 0$ vagyis az i-edik magyarázó változónak a regresszióban nem nulla hatása van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szóródás oka	Négyzetösszeg	Szabadságfok	Átlagos négyzetösszeg	F
Regresszió	SSR	k	$MSR = \frac{SSR}{k}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
Hiba	SSE	$n-k-1$	$MSE = \frac{SSE}{n-k-1}$	
Teljes	SST	$n-1$		

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A multikollinearitás röviden összefoglalva azt jelenti, hogy két vagy több magyarázó változó között túl szoros korrelációs kapcsolat van, és ez zavarja a becslést.

A multikollinearitás mérésére az úgynevezett VIF (variance inflator factor) variancia növelő faktor van forgalomban.

$$VIF_j = \frac{1}{1-R_j^2}$$

A képletben szereplő R_j^2 a j-edik magyarázó változó és az összes többi magyarázó változó közti determinációs együttható.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az autokorreláció a regresszió maradéktagjának a saját későbbi értékeivel való korrelációját jelenti, vagyis egyfajta szabályszerűséget a maradékváltozóban. Ideális esetben a maradéktagnak véletlenszerűnek kell lennie, bármiféle szabályszerűségért a magyarázó változók felelnek a regresszióban.

Az autókorreláció tesztelésére a Durbin-Wattson-tesztet használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Durbin-Wattson-teszt lényegében egy hipotizésvizsgálat, aminek részletezésére nem térünk ki, mindössze a használatát nézzük meg.

Maga a próbafüggvény

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}$$

A szignifikanciaszint α, a próba elvégzése pedig az alábbi módon történik:

d_L és d_U értékeket kikeressük a táblázatból,

n = a megfigyelések száma,

k = a magyarázó változók száma,

végül megnézzük, hogy a próbafüggvény melyik tartományba esik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Idősorok

A dekompozíciós modellek lényege, hogy az idősorok négy, egymástól elkülöníthető komponensből tevődnek össze:

- a hosszú távú folyamatokat leíró trendből,
- az ettől szabályos ingadozással eltérő szezonális komponensből,
- a többnyire hosszú távú hullámzást kifejező ciklikus komponensből és
- a véletlen összetevőből.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lineáris trend egyenlete nagyon egyszerű:

$$\hat{y}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot t$$

A $\hat{b}_0$ és $\hat{b}_1$ paramétereket Excelben vagy bármilyen statisztikai programban néhány kattintással megkapjuk.

Ha kézzel szeretnénk őket kiszámolni, akkor pedig ezekre a normálegyenletekre lesz hozzá szükség:

$$\sum_{t=1}^{n} y_t = n \cdot \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum_{t=1}^{n} t \qquad \sum_{t=1}^{n} t \cdot y_t = \hat{b}_0 \cdot \sum_{t=1}^{n} t + \hat{b}_1 \sum_{t=1}^{n} t^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A szezonalitást úgy kell elképzelni, hogy az minden nyári szezonban ugyanannyit hozzáad, minden téliben pedig ugyanannyit elvesz a trendvonal által meghatározott értékből.

Pl. ha a négy évszakot vesszük, akkor négy szezonunk van, van egy téli, egy tavaszi, egy nyári és egy őszi, ezért négy szezonalitást kell számolnunk. Más idősorok esetében természetesen ez lehet több is és kevesebb is.

A szezonalitás képlete a következő:

$$s_j = \frac{\sum_{i=1}^{n/p} (y_{ij} - \hat{y}_{ij})}{n/p}$$

A képlet roppant barátságos, de némi magyarázatra szorul. Mindössze arról van szó, hogy minden egyes szezonra átlagoljuk a trendvonal és a tényleges értékek közötti eltéréseket.

Vagyis a képletben p a szezontípusok száma, n pedig az összes szezon száma, y_{ij} jelenti a tényleges értéket, ahol az ij-t úgy kell érteni, hogy az i-edik év j-edik szezonja. $\hat{y}_{ij}$ pedig ennek a trend szerinti megfelelője.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha összeadjuk a nyers szezonális eltéréseket, és ezek összege nem nulla, akkor vesszük az átlagukat.

$\overline{s} = \frac{s_1+s_2+s_3+s_4}{4}$

És ezt az átlagot mindegyik nyers szezonális eltérésből levonjuk.

$\tilde{s}_1 = s_1 - \overline{s}$

$\tilde{s}_2 = s_2 - \overline{s}$

$\tilde{s}_3 = s_3 - \overline{s}$

$\tilde{s}_4 = s_4 - \overline{s}$

Így kapjuk meg a korrigált szezonális eltéréseket

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mozgóátlagolás lényege, hogy az idősor egyes elemeit a körülötte lévő elemek átlagával helyettesítjük, kisimítva ezzel az esetleges erős hullámzásokat.

A mozgóátlagok kiszámolásának képlete páros és páratlan tagú átlagok esetén eltérő.

Ha a tagok száma páratlan:

$\hat{y}_t = \frac{y_{t-k}+\cdots+y_{t-1}+y_t+y_{t+1}+\cdots+y_{t+k}}{2k+1}$

Ha pedig a tagok száma páros:

$\hat{y}_t = \frac{\frac{y_{t-k}}{2}+\cdots+y_{t-1}+y_t+y_{t+1}+\cdots+\frac{y_{t+k}}{2}}{2k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Jelentősen csökkenthetjük a normálegyenletek által okozott szenvedéseket, ha az idő múlását jelentő t paramétert úgy adjuk meg, hogy az összege éppen nulla legyen.

Ekkor

$$\sum y_t = n \cdot \hat{b}_0 \qquad \sum t \cdot y_t = \hat{b}_1 \sum t^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönesen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot
