



MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS tantárgy

Kiadás dátuma: 2025. 12. 23.

Tartalomjegyzék

Kombinatorika.....	2
Valszám alapok, klasszikus valszám.....	4
Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel.....	5
Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény.....	6
Geometriai valószínűség, Binomiális tétel.....	9
Várható érték és szórás.....	10
Markov és Csebisev egyenlőtlenségek.....	11
A binomiális eloszlás és a hipergeometriai eloszlás.....	12
Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások.....	14
Kétváltozós eloszlások.....	17
Statisztikai alapfogalmak.....	19
Becslések.....	21
Hipotézisvizsgálat.....	27
Regressziószámítás.....	32
Nem hátrány, ha tudunk integrálni.....	37

Kombinatorika

Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli permutációján az n különböző elem egy sorba rendezését értjük.

n darab különböző elem permutációinak száma:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

n faktoriálisán az n -nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész számok szorzatát értjük.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

pl.:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$1! = 1$$

Továbbá definíció szerint $0! = 1$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.

n darab különböző elemből kiválasztott k darab elem variációinak száma:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha n különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

n darab különböző elem közül kiválasztott k darab elem kombinációinak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha n elem között van $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését ismétléses permutációnak nevezzük.

n elem közötti $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező ismétléses permutációinak száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k -ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem k -ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha kör alakban helyezünk el n különböző elemet és azok sorrendjét vizsgáljuk, akkor ciklikus permutációról beszélünk.

n darab különböző elem ciklikus permutációinak száma $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Valszám alapok, klasszikus valszám

Eseményeknek nevezzük a valószínűségi kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteket.

Megkülönböztetünk elemi eseményeket, ilyen például, hogy egy dobókockával 1-est dobunk. Vannak azonban olyan események is amik több elemi eseményből épülnek fel, ilyen például az, hogy párosat dobunk.

Az eseményeket az ABC nagybetűivel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az [esemény](#) valószínűségét úgy kaphatjuk meg, hogy megszámloljuk hány elemi eseményből áll és ezt elosztjuk az összes [elemi esemény](#) számával.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A és B eseményt egymástól függetlennek nevezzük, ha teljesül rájuk, hogy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A és B eseményt kizárónak nevezünk, ha

$$A \cap B = \emptyset$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A [esemény valószínűsége](#), ha tudjuk, hogy a B [esemény](#) biztosan bekövetkezik:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges [esemény](#), akkor

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_n)P(B_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Bayes tételt akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett (B_k) [esemény](#) valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett (A) tükrében.

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges [esemény](#), akkor bármely B_k eseményre

$$P(B_k | A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x -hez különböző y -okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönösen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Folytonosnak nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik folytonos mennyiségeket mérnek, ilyen például az idő, a távolság. Ebben az esetben az [eloszlás](#) függvény is mindig folytonos függvény lesz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Diszkrétnek nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik megszámlálhatóan sok értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy vagy véges sokat, vagy végtelent, de úgy, hogy fel tudjuk sorolni az értékeit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az X [valószínűségi változó](#) eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(X < x)$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) diszkrét és értékei $X = a, X = b, X = c$ meg ilyenek, akkor az [eloszlásfüggvény](#) mindig egy lépcsőzetes függvény, ami minden számnál pontosan akkorát ugrik, mint az adott szám valószínűsége, amíg el nem érjük az 1-et.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ P(X = a) & \text{ha } a < x \leq b \\ P(X = a) + P(X = b) & \text{ha } b < x \leq c \\ \vdots & \\ 1 & \end{cases}$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) folytonos, akkor az a és b számok között bármilyen valós értéket fölvehet. Ilyenkor az [eloszlásfüggvény](#) is folytonos, ami a -ig nullát vesz föl, a és b közt növekszik és b után végig egyet vesz föl. Vagyis ahol az X [valószínűségi változó](#) működik, ott a függvény életre kel, előtte és utána pedig hibernált állapotban van.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sűrűségfüggvény](#) úgy működik, hogy a valószínűségeket a görbe alatti területek adják meg. Az [eloszlásfüggvény](#) jele $F(x)$ volt, a [sűrűségfüggvény](#) jele $f(x)$. Az $a < X < b$ valószínűség éppen a görbe alatti terület a -tól b -ig.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Ha az $X < a$ valószínűséget szeretnénk kiszámolni:

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Ha a $b < X$ valószínűséget:

$$P(b < X) = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

Ha ezt a három területet összeadjuk, akkor éppen a teljes görbe alatti területet kapjuk, ami a 100%-ot jelenti, így hát ez a terület éppen 1.

A [sűrűségfüggvény](#) tulajdonságai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

nem negatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$1. \lim_{-\infty} F(x) = 0$$

$$2. \lim_{\infty} F(x) = 1$$

3. monoton nő

4. balról folytonos

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

2. nem negatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(b < X) = 1 - F(b) = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az X [valószínűségi változó](#) $F(x)$ eloszlásfüggvényéből úgy kapjuk meg az $f(x)$ sűrűségfüggvényét, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt deriváljuk, azaz:

$$F'(x) = f(x)$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) $f(x)$ sűrűségi függvényét ismerjük, és meg akarjuk adni az $F(x)$ eloszlásfüggvényét, akkor azt pedig így tehetjük:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Geometriai valószínűség, Binomiális tétel

Ha egy [esemény](#) előfordulását geometriai alakzat (vonal, síkidom, test) mértékével jellemezzük, akkor geometriai valószínűségről beszélünk.

Ilyenkor a szokásos $P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ lehet mondjuk $P = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

[Binomiális](#) tétel:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Várható érték és szórás

A várható érték jele $E(X)$.

Diszkrét esetben úgy kell kiszámolni, hogy

$$E(X) = \sum X_i P(X_i)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A szórás azt mutatja meg, hogy a várható érték körül milyen nagy ingadozásra számíthatunk.

Jele: $D(X)$

Kiszámításának módja diszkrét esetben:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Folytonos valószínűségi változók esetén a várható érték:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Folytonos valószínűségi változó esetén a szórást ugyanúgy kell számolni, mint diszkrét valószínűségi változó esetén:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Markov és Csebisev egyenlőtlenségek

A Markov-egyenlőtlenség egy nagyon egyszerű dolgot állít. Az, hogy az X [valószínűségi változó](#) sokkal nagyobb legyen a várható értéknél nem túl valószínű:

$$P(X \geq t \cdot E(X)) \leq \frac{1}{t}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [Csebisev egyenlőtlenség](#) arról szól, hogy a várható értéktől való eltérés nem lehet túl nagy.

Ha ez az eltérés nagyobb, mint a szórás t -szerese, akkor ennek a valószínűsége kicsi:

$$P(|X - E(X)| \geq t \cdot D(X)) \leq \frac{1}{t^2}$$

Ha az eltérés kisebb, mint a szórás t -szerese, akkor ennek valószínűsége nagy:

$$P(|X - E(X)| < t \cdot D(X)) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy [esemény](#) bekövetkezésének elméleti valószínűsége p , akkor minél többször végezzük el a kísérletet, a relatív gyakoriság és az elméleti valószínűség eltérése annál kisebb lesz.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A binomiális eloszlás és a hipergeometriai eloszlás

Ezt a képletet hívjuk [binomiális](#) eloszlásnak:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Visszatevéses mintavételről beszélünk, ha egy p valószínűségű elem többszöri kihúzásának esélyét vizsgáljuk úgy, hogy ha kihúzzunk egy ilyen elemet, akkor ezt követően azt visszarakjuk.

Például ha azt vizsgáljuk, hogy egy kosárban van 8 piros és 5 kék golyó, és mennyi a valószínűsége, hogy háromszor húzva két piros és egy kék golyót húznánk úgy, hogy a kihúzott golyókat mindig visszatesszük, akkor az egy visszatevéses [mintavétel](#).

A visszatevéses mintavételhez kapcsolódó [eloszlás](#) a [binomiális eloszlás](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A visszatevés nélküli [mintavétel](#) tipikus példája, hogy van egy doboz, benne N darab elem. Közülük K darab valamilyen tulajdonságú, az egyszerűség kedvéért hívjuk selejtesnek. Mondjuk sárga vagy szép vagy ronda. Kihúzzunk n darab elemet, és ez a képlet meg fogja nekünk mondani, hogy mekkora az esélye, hogy közülük k darab a vizsgált tulajdonságú:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

De vannak olyan esetek, amikor a visszatevés nélküli mintavételnél másik képletet kell használnunk. Ezt a másik képletet [binomiális](#) eloszlásnak nevezzük, és olyankor használjuk, amikor a selejtek száma helyett csak a selejtek arányát ismerjük.

Ez a [binomiális eloszlás](#) képlete:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

És, hogy mi alapján döntjük el, hogy a két képlet közül melyiket kell használni? A dolog nagyon logikus, nézd meg a kapcsolódó epizódot és minden világos lesz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [hipergeometriai eloszlás](#) a visszatevés nélküli mintavételhez kapcsolódó [eloszlás](#), képlete pedig:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások

A [hipergeometriai eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#).

Ismert, hogy mennyi az összes elem és az összes selejt, vagyis N , K és n .

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A [hipergeometriai eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = n \frac{K}{N}$$

A [hipergeometriai eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [binomiális eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#).

Csak valami %-os izé ismert, a [várható érték](#), az átlag, az arány, a valószínűség, továbbá X korlátos diszkrét [valószínűségi változó](#).

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

A [binomiális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = np$$

A [binomiális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [Poisson eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#), ahol előre ismert a [várható érték](#), és a [valószínűségi változó](#) nem korlátos, vagyis tetszőlegesen bármilyen nagy érték is lehet.

Például valamilyen anyagban a hibák száma, vagy egy adott idő alatt bekövetkező események száma. A [Poisson](#) eloszlásos feladatokban általában valamilyen százalék vagy arány vagy [várható érték](#) vagy átlag vagy valószínűség van megadva. Mondjuk egy könyvben az oldalak 80%-ában nincs hiba, vagy az 20 méter hosszú ruhaszövetek harmadában nincs hiba, vagy egy üzletben óránként várhatóan 13 vevő érkezik, vagy egy bankban percenként átlag 24 tranzakció történik, vagy 0,2 a valószínűsége, hogy 10 perc alatt nem érkezik segélyhívás. Ezek mind Poisson eloszlások, ahol az X nem korlátos diszkrét [valószínűségi változó](#).

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

A [Poisson eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \lambda$$

A [Poisson eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{\lambda}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [exponenciális eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Az [exponenciális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Az [exponenciális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [egyenletes eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq A \\ \frac{x-A}{B-A} & \text{ha } A < x \leq B \\ 1 & \text{ha } B < x \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & \text{ha } A < x \leq B \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Az [egyenletes eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \frac{A+B}{2}$$

Az [egyenletes eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \frac{B-A}{\sqrt{12}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [normális eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

A [normális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \mu$$

A [normális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sigma$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós eloszlások

X és Y együttes eloszlása egy táblázat, amelyben szerepel X és Y összes lehetséges értéke és a hozzájuk tartozó valószínűségek.

Ha a táblázat sorait összeadjuk, akkor Y peremeloszlását kapjuk. Ha az oszlopokat adjuk össze, akkor X peremeloszlását kapjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [korreláció](#) X és Y valószínűségi változók közötti kapcsolatot írja le.

$$COV(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$$

$$R(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{D(X)D(Y)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

X és Y kétváltozós [eloszlás](#) esetén...

X peremeloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = P(X < x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

Y peremeloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az együttes [eloszlás](#) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = F'$$

ahol

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

Az együttes [eloszlásfüggvény](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

X perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

ahol

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du$$

az X perem-eloszlásfüggvénye.

Y perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

ahol

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv$$

az Y perem-eloszlásfüggvénye.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

X és Y kétváltozós [eloszlás](#) esetén...

X peremeloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = P(X < x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

Y peremeloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Statisztikai alapfogalmak

Az adatsor leggyakoribb értéke a [módusz](#). Hogyha például Bob matekjegyei ezek:

2, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 2, 4

Akkor egyszerűen meg kell számolni, hogy melyikből van a legtöbb, és az a matekjegy lesz a [módusz](#). Most 2-esből van a legtöbb, így Bob matekjegyeinek a módusza 2. A [módusz](#) jele M_o és így most $M_o=2$.

Léteznek olyan eloszlások is, amelyeknek több módusza van. Hogyha például Bob jegyei:

1, 2, 2, 3, 5, 3, 3, 4, 2

Itt 2-esből és 3-asból ugyanannyi van, mindkettőből 3 darab. Ez egy kétmódusú [eloszlás](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [medián](#) a növekvő sorba rendezett adatsor középső értéke. Ha az adatsorban páros sok elem van, akkor nincs középső elem, ilyenkor a két középső elem átlagát vesszük.

Hogyha például Bob matekjegyei ezek:

2, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 2, 4

Akkor egyszerűen növekvő sorba kell rakni..

1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

És aztán meg kell keresni melyik a középső. Most nincsen középső, mert páros sok elem van, így ilyenkor a két középen lévő átlagoljuk:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, **2,5**, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

Ezeknek az átlaga 2,5 vagyis a [medián](#) most 2,5. A [medián](#) jele M_e , így $M_e=2,5$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az átlagot úgy kapjuk meg, hogy az összes elemet összeadjuk, és aztán elosztjuk az elemek számával.

Jele: $\bar{x}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az átlagtól való átlagos eltérés egyik legjobb mérőszáma a szórás. Hátránya, hogy egy kicsit ronda a szórás képlete. A szórást egy szigma nevű görög betűvel jelöljük.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az adatsor első felének a felezőpontja az alsó kvartilis.

Az alsó kvartilis jele: Q_1

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az adatsor második felének a felezőpontja a felső kvartilis.

A felső kvartilis jele: Q_3

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kvartilisek és a [medián](#) azt szemlélteti, hogyan oszlanak el az adatsorban szereplő adatok. Ezek segítségével készíthető el a doboz-ábra, vagy másnéven dobozdiagram. Szokás még sodrófa diagramnak is nevezni, és az angol elnevezést is gyakran használják, ami a box plot.

Egy sobarendezett adatsorban öt darab speciális negyedelőpontot fogunk használni. Az első az adatsor legkisebb értéke, ez a Q_0 . Aztán a következő negyedelő az alsó kvartilis, ami Q_1 utána jön a felezőpont vagyis a [medián](#), ezt Me -vel és Q_2 -vel is jelöljük, végül a felső kvartilis, ami a Q_3 . Az adatsor legnagyobb értéke pedig Q_4 . A legnagyobb és a legkisebb érték különbsége a terjedelem, míg a két kvartilis különbségét félterjedelemnek vagy más néven interkvartilisnek hívjuk. Ezekből épül föl a doboz-ábra vagy másként dobozdiagram.

Előfordulhat, hogy az adatsorban kiugró értékek is szerepelnek. A kiugró érték az, ami az alsó kvartilisnél legalább a félterjedelem másfélszeresénél kisebb, vagy pedig a felső kvartilisnél legalább a félterjedelem másfélszeresénél nagyobb. Huh, ez elég bonyolult hangzik. De valójában nagyon egyszerű, csak nézd meg kapcsolódó epizódot és kiderül.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A relatív szórás azt mondja meg, hogy a szórás az átlagnak hány százaléka:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Becslések

Olyan esetekben, amikor valamiért nem tudjuk vagy nem akarjuk a teljes sokaságot megvizsgálni, hogy meghatározzuk a fontosabb statisztikai mutatóit, becslést alkalmazunk. A becslés lényege, hogy egy minta alapján próbálunk ezekre a mutatókra következtetni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A megbízhatósági szintet konfidencia szintnek nevezzük. A konfidencia szint szokásos jelölése $1 - \alpha$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $1 - \alpha$ megbízhatósági szinthez, vagy másként konfidencia szinthez tartozó konfidencia intervallumok azok az intervallumok, amik a sokasági átlagot $1 - \alpha$ valószínűséggel tartalmazzák.

A konfidencia intervallum végpontjai:

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ahol}$$

$\bar{x}$ = a minta átlaga

n = a minta elemszáma

σ = a teljes [sokaság](#) szórása

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [standard normális eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó Z értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ahol}$$

$\bar{x}$ = a minta átlaga

n = a minta elemszáma

σ = a teljes [sokaság](#) szórása

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [standard normális eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó Z értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A FAE minta azt jelenti, hogy a [mintavétel](#) során bármely mintaelemet azonos eséllyel választunk ki. Ilyen a visszatevéses [mintavétel](#), vagy pedig abban az esetben ha az alap [sokaság](#) elemszáma nagyon nagy, akkor a visszatevés nélküli [mintavétel](#) is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$s =$ a teljes [sokaság](#) szórása, a sokasági szórás nem ismert

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [t-eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [standard normális eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó Z értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(v)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(v)} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$s =$ a minta szórása, a sokasági szórás nem ismert

$\chi^2(v)$ pedig a khi-négyzet [eloszlás](#) megfelelő értéke

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az EV-minta abban különbözik a FAE-mintától, hogy a kiválasztott mintaelemek nem függetlenek egymástól.

Ez olyankor fordulhat elő, ha a teljes [sokaság](#) mérete viszonylag kicsi a minta elemszámához képest. EV-minták esetén tehát a minta fontos jellemzőjévé válik, hogy mekkora a teljes [sokaság](#), amelynek elemszámát N jelöli.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$N =$ a teljes [sokaság](#) elemszáma

$s =$ a minta szórása

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [t-eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$N =$ a teljes [sokaság](#) elemszáma

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [standard normális eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó Z értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a teljes sokaságot felosztjuk viszonylag homogén rétegekre, és a mintát is ezen a rétegek szerint vizsgáljuk, a variancia csökkenthető.

$$\hat{\bar{x}}_R \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\hat{\bar{X}}_R}$$

$1 - \alpha$ = konfidencia szint

$\bar{x}$ = a minta átlaga

n = a minta elemszáma

n_j = a minta j-edik rétegének elemszáma

N = a teljes [sokaság](#) elemszáma

N_j = a teljes [sokaság](#) j-edik rétegének elemszáma

W_j = a teljes [sokaság](#) j-edik rétegének a teljes sokasághoz viszonyított aránya

s_j = a minta j-edik rétegének szórása

$$\hat{\bar{X}}_R = \sum_{j=1}^M W_j \bar{x}_j$$

$$s_{\hat{\bar{X}}_R}^2 = \sum_{j=1}^M W_j^2 \frac{s_j^2}{n_j} \left(1 - \frac{n_j}{N_j}\right)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kétmintás becslésekre akkor van szükség, amikor két [sokaság](#) valamilyen paraméterét, leginkább az átlagát szeretnénk összehasonlítani.

A kétmintás [becslések](#) lehetnek független mintás [becslések](#) vagy páros mintás [becslések](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha mindkét [sokaság](#) közel normális eloszlású, akkor az [átlagok](#) különbségének becslésére ez a formula van forgalomban.

$$d \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_d \text{ ahol } d = \bar{x} - \bar{y}$$

$$s_d = s_c \cdot \sqrt{\frac{1}{n_Y} + \frac{1}{n_X}} \text{ itt } s_c^2 = \frac{(n_X-1)s_X^2 + (n_Y-1)s_Y^2}{n_X+n_Y-2}$$

$1 - \alpha$ = konfidencia szint

$\bar{x}$ = az egyik minta átlaga

$\bar{Y}$ = a másik minta átlaga

n_X = az egyik minta elemszáma

n_Y = a másik minta elemszáma

A szabadságfok $v = n_X + n_Y - 2$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy becslést torzítatlannak nevezünk, ha az egyes mintákból kapott [becslések](#) várható értéke megegyezik a becslni kívánt mennyiséggel.

Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy a becslés során kapott értékek a becslni kívánt érték körül ingadoznak, és ez az ingadozás szimmetrikus. A torzítatlan becsléseket mindig előnyben részesítjük a torzítottakkal szemben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kérdés az, hogy ha egy sokasági jellemzőre több becslés jöhet szóba, hogyan válasszunk közülük, vagyis mikor tekintünk egy becslést jónak, kettő közül melyiket tekintjük jobbnak és kijelenthetjük-e valamelyikről, hogy a legjobb?

Két alapvető szempont alapján szoktuk a becsléseket versenyeztetni. Az egyik, a már jól ismert torzítatlanság, vagyis a becslésnek az a tulajdonsága, hogy az összes lehetséges mintán vett [becslések](#) átlaga megegyezik a becslni kívánt sokasági jellemzővel. A másik az úgynevezett minimális variancia kritérium.

A minimális variancia kritérium azt jelenti, hogy ha van két torzítatlan becslésünk, akkor a kettő közül azt tekintjük jobbnak, aminek az összes mintán vett értékeinek varianciája kisebb.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

Az első tag a varianciát, a második tag a várható értéktől való eltérést, vagyis a torzítottságot méri. Ha a becslés torzítatlan, $E(\hat{\theta}) = \theta$ így ez a második tag nulla. Két becslés közül azt részesítjük előnyben, amelyre MSE kisebb.

Az $E(\hat{\theta}) - \theta$ különbségre, vagyis a torzítás mértékére az angol bias szó alapján a $Bs\hat{\theta}$ jelölés van forgalomban. Használatos tehát az

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) + Bs^2(\hat{\theta})$$

Képlet is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Eddigi vizsgálódásaink egyik legfontosabb eredménye a mintaátlagot eloszlásának jellemzése. Ha a teljes [sokaság](#) átlaga μ és szórása pedig σ , akkor az ebből vett n elemű minták átlagai olyan eloszlással helyezkednek el, aminek átlaga szintén μ , a szórása pedig $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ezt az utóbbit a minta standard hibájának szokás nevezni. A standard hiba tehát azt mondja meg, hogy a minta [átlagok](#) mekkora szórással ingadoznak a tényleges sokasági átlag körül.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mintavételi hibának azokat a hibákat nevezzük, amik kimondottan azért fordulnak elő, mert nem tudjuk, vagy nem akarjuk a teljes sokaságot vizsgálni. A mintavételi hiba tehát a [sokaság](#) eloszlásán és a mintavételi eljárásen kívül főleg a minta elemszáma határozza meg. Mivel pedig ezeket általában már a mintavételt megelőzően ismerjük, a mintavételi hibának megvan az a kellemes tulajdonsága, hogy legtöbbször előre megállapítható. Vagyis még el sem végeztük a mintavételt, de már tudjuk, hogy mekkora lesz a [mintavétel](#) során elkövetett hiba. Ez a kellemes tulajdonság lesz a kiindulópont a [becslések](#) és később a hipotézisvizsgálatok elméletének kiépítésében.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hipotézisvizsgálat

Az [elfogadási tartomány](#) az a tartomány, ahová ha a próba értéke kerül, akkor a nullhipotézist elfogadjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [kritikus tartomány](#) az a tartomány, ahová ha a próba értéke kerül, akkor a nullhipotézist elvetjük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [szignifikanciaszint](#) a hibás döntés valószínűsége.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

ELSŐ LÉPÉS: A HIPOTÉZIS MEGFOGALMAZÁSA

Minden [hipotézisvizsgálat](#) két egymásnak ellentmondó felvetés felírásával kezdődik. Az egyiket nullhipotézisnek nevezzük és H_0 -al jelöljük, a másikat pedig ellenhipotézisnek és jele H_1 .

MÁSODIK LÉPÉS: A PRÓBAFÜGGVÉNY KIVÁLASZTÁSA

A próbafüggvények kiválasztása magától a hipotézistől, illetve a [mintavétel](#) módjától is függ.

HARMADIK LÉPÉS: [SZIGNIFIKANCIASZINT](#) ÉS [KRITIKUS TARTOMÁNY](#)

Ha a próbafüggvény értéke az elfogadási tartományba fog esni, akkor ezt a tényt a nullhipotézist igazoló jelnek fogjuk tekinteni. Hogyha pedig a kritikus tartományba, akkor a nullhipotézist elvetjük.

NEGYEDIK LÉPÉS: [MINTAVÉTEL](#) ÉS DÖNTÉS

Ha a mintavétellel kapott eredményünk szerint a próbafüggvény az elfogadási tartományba esik, akkor a H_0 nullhipotézist tekintjük igaznak, a H_1 ellenhipotézist pedig elvetjük.

Ha viszont a próbafüggvény a minta alapján a kritikus tartományba esik, akkor a H_0 nullhipotézist vetjük el és a H_1 ellenhipotézist tekintjük igaznak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) normális eloszlású, szórása σ , H_0 a [sokaság](#) átlagára vonatkozik, a minta elemszáma n .

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) normális eloszlású, szórása nem ismert, H_0 a [sokaság](#) átlagára vonatkozik, a minta elemszáma n .

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) tetszőleges eloszlású, szórása nem ismert, H_0 a [sokaság](#) átlagára vonatkozik, a minta n elemű, elemszáma nagy.

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) tetszőleges eloszlású, H_0 a sokasági arányra vonatkozik, a minta n elemű, elemszáma nagy.

$$Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) normális eloszlású, H_0 a sokasági szórásra vonatkozik, a minta n elemű.

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) eloszlására irányuló vizsgálat.

H_0 : mindegyik osztályköz valószínűsége egy adott eloszlásnak megfelelő érték, vagyis minden i -re az i -edik osztályköz valószínűsége a P_i érték.

Az ellenhipotézis pedig, H_1 : van olyan osztályköz, ami nem az adott eloszlásnak megfelelő P_i érték. A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. A minta elemszáma n .

$$\chi^2(v) = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$$

ahol a v szabadságfok: $v = k - b - 1$.

Itt k = az osztályközök száma és b = az adott [eloszlás](#) azon paramétereinek száma, amit a mintából becsléssel határozzunk meg.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sokaságon belül két [ismérv](#) függetlenségére irányuló vizsgálat. H_0 : a két [ismérv](#) független, az ellenhipotézis pedig, H_1 : a két [ismérv](#) közti kapcsolat sztochasztikus vagy függvényszerű.

A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. A minta elemszáma n , a minta alapján készített [kontingencia tábla](#) sorainak száma r , oszlopainak száma c .

$$\chi^2(v) = \sum \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}$$

ahol a v szabadságfok $v = (r - 1)(c - 1)$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két sokaságban valamely változó eloszlásának egyezőségére irányuló vizsgálat. H_0 : a két sokaságban az [eloszlás](#) egyező, az ellenhipotézis pedig, H_1 : a két [eloszlás](#) nem egyező.

A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. Mintát ezúttal mindkét sokaságból veszünk, az X sokaságból vett minta elemszáma n_X az Y sokaságból vett mintáé n_Y mindkét mintában az osztályközök száma k .

$$\chi^2(v) = n_X \cdot n_Y \cdot \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n_X + n_Y} \cdot \left(\frac{n_{Xi}}{n_X} - \frac{n_{Yi}}{n_Y} \right)^2 \right)$$

ahol a v szabadságfok $v = k - 1$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mindkét [sokaság](#) normális eloszlású, szórásaik σ_X és σ_Y .

$$Z = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n_Y} + \frac{\sigma_X^2}{n_X}}}$$

A nullhipotézis: $H_0: \mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték. A minták elemszáma n_X és n_Y .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A két [sokaság](#) normális eloszlású és szórásaik egyformák.

$$t(v) = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - \delta_0}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_Y} + \frac{1}{n_X}}}$$

$$\text{itt } s^2 = \frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

A nullhipotézis $H_0: \mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték.

A minták elemszáma n_X és n_Y , szórása s_X és s_Y , a szabadságfok $v = n_Y + n_X - 2$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A két [sokaság](#) eloszlása és szórása nem ismert, mindkettő szórása véges, és mindkét minta elemszáma elég nagy.

$$Z = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{s_Y^2}{n_Y} + \frac{s_X^2}{n_X}}}$$

A nullhipotézis $H_0: \mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték.

A minták elemszáma n_X és n_Y , szórása s_X és s_Y .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [sokaság](#) szórásának összehasonlítására irányuló próba, ha mindkét [sokaság](#) normális eloszlású. A nullhipotézis

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad F_{1-p}(v_1; v_2) = \frac{1}{F_p(v_2; v_1)}$$

Az F-eloszlás két szabadságfoka

$$v_1 = n_1 - 1 \text{ és } v_2 = n_2 - 1$$

$$\text{Bal oldali kritikus érték: } \frac{1}{F_{1-\alpha}(v_2; v_1)}$$

$$\text{Jobb oldali kritikus érték: } F_{1-\alpha}(v_1; v_2)$$

Kétoldali kritikus érték:

$$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_2; v_1)} \text{ és } F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1; v_2)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Több [sokaság](#) várható értékének összehasonlítására vonatkozó próba, ha mindegyik [sokaság](#) normális eloszlású és azonos szórású.

A H_0 nullhipotézis: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_M = \mu$, vagyis az, hogy a várható értékek az összes sokaságra (M db) megegyeznek, míg az ellenhipotézis az, hogy van olyan μ_j amire $\mu_j \neq \mu$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Bartlett-próba több [sokaság](#) szórásának összehasonlítására vonatkozó próba, ha mindegyik [sokaság](#) normális eloszlású.

A H_0 nullhipotézis: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_M = \sigma$, vagyis az, hogy az összes [sokaság](#) (M db.) szórása megegyezik, míg az ellenhipotézis az, hogy van olyan σ_j , amire $\sigma_j \neq \sigma$.

$$SSB = \sum_{j=1}^M (n_j - 1) s_j^2 \quad s_b = \frac{SSB}{n-M}$$

A próbafüggvény

$$B^2 = \frac{1}{c} \left(v \cdot \ln s_b^2 - \sum_{j=1}^M v_j \ln s_j^2 \right)$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(M-1)} \left(\sum_{j=1}^M \frac{1}{v_j} - \frac{1}{v} \right)$$

Jobb oldali kritikus érték: $\chi_{1-\alpha}^2(M-1)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Regressziószámítás

A [regresszió](#) egyenes egyenlete:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x$$

$$\text{Ahol } b_1 = \frac{\sum dx \cdot dy}{\sum d^2 x} \text{ és } b_0 = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x}$$

A regressziós egyenes egyenletében szereplő regressziós paraméterek közül b_1 az egyenes meredeksége. A b_0 érték kevésbé jelentős, ez azt adja meg, hogy a magyarázó változó nulla értékéhez milyen y érték tartozik.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A regressziós egyenes egyenlete $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x$

Ez egy [lineáris függvény](#), ami mindegyik x -hez hozzárendel valamilyen y -t. Ezek általában eltérnek a valódi y -októl. Ezeket az eltéréseket reziduumoknak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A reziduumokból képzett mutató az úgynevezett SSE, jelentése sum of squares of the errors vagyis eltérési négyzetösszeg.

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Ha a [regresszió](#) tökéletesen illeszkedik, akkor az $e_i = y_i - \hat{y}_i$ különbségek mindegyike 0, így $SSE=0$. Ha az illeszkedés nem tökéletes, akkor SSE egy pozitív érték, ami az illeszkedés pontatlanságát méri.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az SSE értékeit elosztjuk a megfigyelt pontok számával és a kapott eredménynek vesszük a gyökét, akkor kapjuk a reziduális szórást:

$$s_e^* = \sqrt{\frac{SSE}{n}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az illeszkedés egy mérőszáma a lineáris [korrelációs együttható](#):

$$r = \frac{\sum dx \cdot dy}{\sqrt{\sum d^2 x \cdot \sum d^2 y}}$$

A lineáris [korrelációs együttható](#) azt méri, hogy x és y között milyen szoros lineáris kapcsolat van. Értéke mindig $-1 \leq r \leq 1$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A magyarázóerőt méri az úgynevezett determinációs együttható, melynek jele R^2 . Ez a kétváltozós lineáris modell esetében megegyezik r^2 -tel.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Itt SSE az eltérés-négyzetösszeg, míg SSR az úgynevezett regressziós, vagy magyarázó négyzetösszeg, SST pedig a teljes négyzetösszeg, a köztük lévő kapcsolat pedig...

$$SST = \sum d^2 y \quad SSR = \sum (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2 = b_1^2 \sum d^2 x \quad SSE = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum e_i^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [regresszió](#) egyenes egyenlete:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x$$

Amiből

$$\lg \hat{y} = \lg \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot \lg x$$

$$\text{Ahol } \hat{b}_1 = \frac{\sum d \lg x \cdot d \lg y}{\sum d^2 \lg x} \text{ és } \lg \hat{b}_0 = \overline{\lg y} - \overline{\lg x} \cdot \hat{b}_1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [regresszió](#) egyenes egyenlete:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x$$

Amiből

$$\lg \hat{y} = \lg \hat{b}_0 + x \cdot \hat{b}_1$$

$$\text{Ahol } \lg \hat{b}_1 = \frac{\sum dx \cdot d \lg y}{\sum d^2 x} \text{ és } \lg \hat{b}_0 = \overline{\lg y} - \bar{x} \cdot \lg \hat{b}_1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elaszticitás két összefüggő jelenség közti kapcsolat.

$$\text{Lineáris modellben: } El(\hat{y}, x) = \frac{\hat{b}_1 x}{\hat{y}} = \frac{\hat{b}_1 x}{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x}$$

$$\text{Hatványkitevős modellben: } El(\hat{y}, x) = \hat{b}_1$$

$$\text{Exponenciális modellben: } El(\hat{y}, x) = x \cdot \ln \hat{b}_1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

- I. A magyarázó változók nem valószínűségi változók.
- II. A magyarázó változók lineárisan független rendszert alkotnak.
- III. Az eredményváltozó közel lineáris függvénye a magyarázó változónak.
- IV. Az ϵ hibatag feltételes eloszlása normális, várható értéke nulla.
- V. Az ϵ hibatag különböző x -ekhez tartozó értékei korrelálatlanok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A paraméterek becslése:

$$\hat{b}_i \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot (n - k - 1) \cdot s_{\hat{b}_i}$$

A [regresszió](#) becslése:

$$\hat{y}_* \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot (n - k - 1) \cdot s_{\hat{y}_*}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A többváltozós regressziós modelleket olyankor alkalmazzuk, amikor az eredményváltozó alakulását több magyarázó változó tükrében vizsgáljuk.

A többváltozós [lineáris regresszió](#) egyenlete:

$$y = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 + \dots + \hat{b}_k x_k + \epsilon$$

Az y eredményváltozó itt k darab magyarázó változótól és a hibatagtól függ.

A képletben a $\hat{b}_0$ paraméter a tengelymetszet, a többi $\hat{b}_i$ paraméter pedig azt jelenti, hogy az i -edik magyarázó változó egy egységgel történő változása, mennyivel változtatja az $\hat{y}$ értéket, ha a többi magyarázó változót rögzítjük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kétváltozós esethez hasonlóan a [korreláció](#) itt is a változók közti kapcsolat szorosságát írja le, csak hogy itt egy fokkal rosszabb a helyzet, ugyanis most bármely két változó korrelációját vizsgálhatjuk. Ezt tartalmazza a korrelációmátrix.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & \dots & r_{yk} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{ky} & r_{k1} & r_{k2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Itt r_{ij} az x_i és az x_j magyarázó változók közti korrelációt írja le, tehát például r_{12} az x_1 és az x_2 közti korrelációt jelenti.

r_{iy} pedig az x_i magyarázó változó és az y eredményváltozó közti kapcsolatot jelenti.

Mivel $r_{ij} = r_{ji}$ a [korreláció-mátrix](#) szimmetrikus. Az áttekinthetőbb felírás kedvéért a felső háromszöget el is szokták hagyni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [lineáris regresszió](#) egyenlete: $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x_1 + \hat{b}_2x_2 + \dots + \hat{b}_kx_k$

A tesztelés úgy zajlik, hogy nullhipotézisnek tekintjük a $H_0 : b_i = 0$ feltevést, ellenhipotézisnek pedig azt, hogy $H_1 : b_i \neq 0$.

A nullhipotézis azt állítja, hogy a modellben a b_i paraméter szignifikánsan nulla, vagyis az i -edik magyarázó változó felesleges, annak hatása az eredményváltozóra nulla. Az ellenhipotézis ezzel szemben az, hogy $b_i \neq 0$ vagyis az i -edik magyarázó változónak a regresszióban nem nulla hatása van.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Szóródás oka	Négyzetösszeg	Szabadságfok	Átlagos négyzetösszeg	F
Regresszió	SSR	k	$MSR = \frac{SSR}{k}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
Hiba	SSE	$n - k - 1$	$MSE = \frac{SSE}{n - k - 1}$	
Teljes	SST	$n - 1$		

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A multikollinearitás röviden összefoglalva azt jelenti, hogy két vagy több magyarázó változó között túl szoros [korrelációs kapcsolat](#) van, és ez zavarja a becslést.

A multikollinearitás mérésére az úgynevezett VIF (variance inflator factor) variancia növelő faktor van forgalomban.

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

A képletben szereplő R_j^2 a j -edik magyarázó változó és az összes többi magyarázó változó közti determinációs együttható.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az auto**korreláció** a **regresszió** maradéktagjának a saját későbbi értékeivel való korrelációját jelenti, vagyis egyfajta szabályszerűséget a maradékváltozóban. Ideális esetben a maradéktagnak véletlenszerűnek kell lennie, bármiféle szabályszerűségért a magyarázó változók felelnek a regresszióban.

Az autó**korreláció** tesztelésére a Durbin-Watson-tesztet használjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Durbin-Watson-teszt lényegében egy hipotézisvizsgálat, aminek részletezésére nem térünk ki, mindössze a használatát nézzük meg.

Maga a próbafüggvény

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^n e_t^2}$$

A **szignifikanciaszint** α , a próba elvégzése pedig az alábbi módon történik:

d_L és d_U értékeket kikeressük a táblázatból,

n = a megfigyelések száma,

k = a magyarázó változók száma,

végül megnézzük, hogy a próbafüggvény melyik tartományba esik.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Nem hátrány, ha tudunk integrálni

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$ -et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \ln |ax+b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnós az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \quad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \quad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{cx+d} dx &= \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d} dx = \\ &= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + E \ln |cx+d| \frac{1}{c} \end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}} dx \quad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x)) dx \quad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \quad f = \sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \quad f = \operatorname{sh}^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \quad f = \operatorname{ch}^2 u$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}} dx \quad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x)) dx \quad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \quad f = \sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \quad f = \operatorname{sh}^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \quad f = \operatorname{ch}^2 u$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az $u = \tan \frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törtet az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = A \int \frac{1}{ax+b} dx = A \ln |ax+b| \cdot \frac{1}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = A \int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c} dx \right) =$$

$$= \frac{A}{2a} \left(\ln |ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}} \right) \cdot \sqrt{D} \right)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)