

Bizonyítási módszerek, matematikai logika feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámaúra kattintva találod meg.

261 | 2026. május 6./b

A G halmaz a kilencpontú, összefüggő, egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a G elemeire vonatkozik: Ha egy (kilencpontú, összefüggő, egyszerű) gráfban minden pont fokszáma legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Fogalmazza meg az állítás megfordítását a G elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

[3 pont]

251 | 2025. május idegen nyelvi 8./a

Adja meg az összes olyan állítás betűjelét, amely a következő állítás tagadása!

„Minden virág illatos.”

- A) Van olyan virág, amelyik illatos.
- B) Van olyan virág, amelyik nem illatos.
- C) Semelyik virág nem illatos.
- D) Nem minden virág illatos.

[2 pont]

252 | 2025. október 3./b, c

Az alábbi állításban a, b és c pozitív valós számokat jelölnek: „Ha van olyan háromszög, amelynek oldalai (centiméterben mérve) a, b, c hosszúak, akkor $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 > 0$.”

b) Bizonyítsa be, hogy az állítás igaz!

[4 pont]

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és adja meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

[3 pont]

253 | 2025. október 5./c

Egy szabályos dobókockával többször dobunk.

Határozza meg azt a legkisebb n egész számot, amelyre igaz, hogy n dobás között biztosan lesz legalább 3 egyforma értékű! Válaszát itt nem kell indokolnia.

[2 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

241 | 2024. május 2./c

Legyen H az egyjegyű pozitív egész számok halmaza.

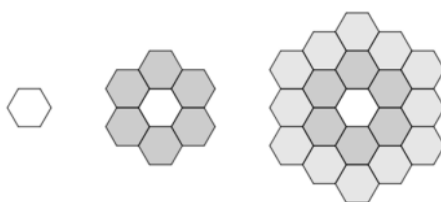
A és B legyen a fenti H alaphalmaz két részhalmaza. Adja meg az alábbi (igaz) állítás megfordítását, és adja meg a megfordítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

„Ha $A = \bar{B}$, akkor $A \cap B = \emptyset$.”

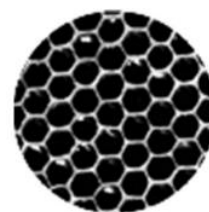
[3 pont]

242 | 2024. május idegen nyelvi 4./b

A méhek (megközelítőleg) szabályos hatszög alakú sejtekből építik fel a lépet. Az építkezés első „lépése” után 1, a második lépése után 7, a harmadik lépése után 19 sejt készült már el összesen. Az első három lépést szemlélteti az alábbi ábra.



Tegyük fel, hogy az ábra szerint vázolt „körkörös” stratégia szerint építkeznek tovább a méhek, azaz minden egyes további lépésben újabb szabályos hatszög alakú sejtekkel veszik körül az előzőleg már elkészült építményt. Így a harmadik lépéstől kezdve minden egyes lépésben 6-tal több új szabályos hatszöget építenek meg, mint az előző lépésben.



Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy az n -edik lépés után összesen $3n^2 - 3n + 1$ darab hatszög készült el!

[6 pont]

243 | 2024. október 1./a, b

- a) Legyen a és b két pozitív valós szám. Határozza meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

„Ha $a > 6$ és $b > 8$, akkor a és b számtani közepe nagyobb 7-nél.

[2 pont]

- b) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!

[3 pont]

244 | 2024. október 1./d

Tudjuk, hogy az $(A \wedge \neg B) \wedge (A \vee \neg C)$ kijelentés logikai értéke igaz. Mit lehet tudni az A , B és C kijelentések logikai értékéről? Tegyen X-et az alábbi táblázat megfelelő celláiba! (Válaszait itt nem kell indokolnia.)

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

	biztosan igaz	biztosan hamis	nem lehet eldönteni
A			
B			
C			

[3 pont]

231 | 2023. május 2./c

Jelölje meg annak az állításnak a betűjelét, amely tagadása a következő állításnak: „Bármely két magyar rendszám különböző.”

- A) Minden magyar rendszám egyforma.
- B) Van pontosan két egyforma magyar rendszám.
- C) Van legalább két egyforma magyar rendszám.
- D) Nincs két egyforma magyar rendszám.

[2 pont]

232 | 2023. május idegen nyelvi 2./b, c

Tekintsük a következő két állítást (a, b, c pozitív egészek)!

- I. Ha c osztója ab -nek, akkor c osztója a -nak vagy c osztója b -nek.
- II. Ha a osztója c -nek és b osztója c -nek, akkor ab osztója c -nek.

b) Határozza meg a két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!

[4 pont]

c) Fogalmazza meg az I. állítás megfordítását, és határozza meg a megfordítás logikai értékét! Ha a megfordítás igaz, akkor bizonyítsa be, ha pedig hamis, akkor mutasson ellenpéldát!

[4 pont]

233 | 2023. október 9./b, c

Legyen k tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész szám. Jelölje S_k azt az összeget, amelyet a következő eljárással kapunk: az $1, 2, 3, \dots, k$ számok (az első k db pozitív egész szám) felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

b) Igazolja, hogy $S_{k+1} = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2}$.

[4 pont]

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy tetszőleges 1-nél nagyobb n egész szám esetén $S_n = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$.

[8 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

221 | 2022. május idegen nyelvi 1./a

Adottak az A , B , C kijelentések. Az A és B kijelentések logikai értéke igaz, a C kijelentés logikai értéke hamis. Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét! (Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)

- (1) $A \wedge C$
- (2) $\neg A \vee B$
- (3) $B \rightarrow C$
- (4) $(A \wedge \neg B) \vee C$

[3 pont]

222 | 2022. május idegen nyelvi 2./b, c

Jelölje x és y a derékszögű koordináta-rendszer egy tetszőleges pontjának első, illetve második koordinátáját, és legyen c egy valós szám.

b) Igaz-e a következő állítás?

Ha $c \leq 12$, akkor $x^2 + 4x + y^2 - 6y + c = 0$ egy kör egyenlete.

(Válaszát indokolja!)

[4 pont]

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! (Válaszát indokolja!)

[3 pont]

211 | 2021. május idegen nyelvi 1./d

Határozza meg az $(A \vee B) \rightarrow C$ állítás logikai értékét az A, B és C kijelentések különböző lehetséges logikai értékei esetén, és töltsse ki ennek megfelelően az alábbi igazságtáblázatot! (Válaszait itt nem szükséges indokolnia.)

A	B	C	$(A \vee B) \rightarrow C$
i	i	i	
i	i	h	
i	h	i	
i	h	h	
h	i	i	
h	i	h	
h	h	i	
h	h	h	

[3 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

212 | 2021. május idegen nyelvi 9./a

Igazolja, hogy $\frac{2}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ ($n \in \mathbf{N}^+$)

[3 pont]

213 | 2021. október 1./b, c

Legyen $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ahol x valós szám.

Tekintsük a következő állítást: „Ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$.”

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

[4 pont]

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja!

[3 pont]

201 | 2020. május idegen nyelvi 7./b

Az n rétegű piramis $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ darab golyóból áll ($n \in \mathbf{N}^+$).

Bizonyítsa be (például teljes indukcióval), hogy $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

[6 pont]

Megoldások

261

[Vissza a feladathoz.](#)

Az állítás megfordítása: Ha egy (kilencpontú, összefüggő, egyszerű) gráfban van kör, akkor minden pontjának fokszáma legalább 2.	1 pont
Az állítás hamis.	1 pont
Jó ellenpélda.	1 pont

251

[Vissza a feladathoz.](#)

B, D	2 pont
------	--------

252

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2 =$	1 pont
$= (a + b + c)(a + b - c)$	1 pont
A háromszög-egyenlőtlenség miatt $a + b > c$ teljesül,	1 pont
így a szorzat mindkét tényezője pozitív, tehát az állítás valóban igaz.	1 pont
c)	
Az állítás megfordítása: „Ha (az a , b és c pozitív valós számokra teljesül, hogy) $a^2 + b^2 + 2ab - c^2 > 0$, akkor van olyan háromszög, amelynek az oldalai (cm-ben) a , b , c hosszúak.”	1 pont
Az állítás hamis.	1 pont
Egy ellenpélda (például $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$).	1 pont

253

[Vissza a feladathoz.](#)

$n = 13$ (A dobókockával 6-félét dobhatunk, így a skatulyaelv miatt $6 \cdot 2 + 1 = 13$ dobás között már biztosan lesz legalább 3 egyforma.)	2 pont
---	--------

241

[Vissza a feladathoz.](#)

Az állítás megfordítása: „Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $A = \bar{B}$.”	1 pont
A megfordítás hamis.	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Például $A = \{1\}$ és $B = \{2\}$ esetén a két halmaz metszete üres, de $A \neq \bar{B}$.	1 pont
---	--------

242

[Vissza a feladathoz.](#)

(Teljes indukcióval bizonyítunk.) Az állítás $n = 1$ esetén igaz ($3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1$).	1 pont
Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$ -ra igaz ($k \geq 1$): a k -edik lépésig megépített hatszögek száma $3k^2 - 3k + 1$.	1 pont
Be kell látnunk, hogy a $k + 1$ -edik lépés után $3(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1 = 3k^2 + 3k + 1$ hatszög lesz.	1 pont
A $k + 1$ -edik lépésben $6k$ darabbal növekszik a hatszögek száma,	1 pont
így a $k + 1$ -edik lépés után a hatszögek száma $3k^2 - 3k + 1 + 6k =$	1 pont
$= 3k^2 + 3k + 1$ valóban. Ezzel az állítást beláttuk.	1 pont

243

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
Az állítás igaz.	1 pont
Helyes indoklás, például: $\frac{a+b}{2} > \frac{6+8}{2} = 7$.	1 pont
b)	
A megfordítás: Ha a és b számtani közepe nagyobb 7-nél, akkor $a > 6$ és $b > 8$.	1 pont
A megfordítás hamis.	1 pont
Jó ellenpélda (pl. $a = 5, b = 11$).	1 pont

244

[Vissza a feladathoz.](#)

	biztosan igaz	biztosan hamis	nem lehet eldönteni	3 pont
A	X			
B		X		
C			X	

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

231

[Vissza a feladathoz.](#)

C	2 pont
---	--------

232

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
Az I. állítás hamis.	1 pont
Például a 6 osztója a $2 \cdot 3$ szorzatnak, de a 6 nem osztója sem a 2-nek, sem a 3-nak.	1 pont
A II. állítás hamis.	1 pont
Például a 4 és a 6 is osztója a 12-nek, de a $4 \cdot 6$ szorzat nem osztója a 12-nek.	1 pont
c)	
Megfordítás: Ha c osztója a -nak vagy c osztója b -nek, akkor c osztója ab -nek. Vagy: Ha c nem osztója ab -nek, akkor c nem osztója a -nak és c nem osztója b -nek.	1 pont
A megfordítás igaz,	1 pont
hiszen a feltétel szerint igaz, hogy $a = kc$ vagy $b = mc$, így $ab = (kb)c$ vagy $ab = (am)c$; tehát ab többszöröse c -nek (c osztója ab -nek) $(k, m \in \mathbb{N}^+)$.	2 pont

233

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
$S_{k+1} = S_k + 1 \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1) + \dots + k \cdot (k+1)$	2 pont
$S_{k+1} = S_k + (1 + 2 + \dots + k) \cdot (k+1) =$	1 pont
$= S_k + \frac{k(k+1)}{2} \cdot (k+1) = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2}$ valóban.	1 pont
c)	
Bizonyítás teljes indukcióval: $n = 2$ esetén $S_2 = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8}{24} = \frac{48}{24}$ igaz	1 pont
Elegendő belátni, hogy ha valamely k esetén igaz az állítás $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$, akkor igaz $k+1$ -re is, vagyis $S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{24}$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

A b) feladat szerint $S_{k+1} = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2} =$ $= \frac{(k-1)k(k+1)(3k+2)}{24} + \frac{k(k+1)^2}{2}$	1 pont
$k(k+1)$ -et kiemelve: $S_{k+1} = k(k+1) \frac{(k-1)(3k+2) + 12(k+1)}{24} =$	1 pont
$= k(k+1) \cdot \frac{3k^2 + 11k + 10}{24}$	1 pont
Mivel $3k^2 + 11k + 10 = (k+2)(3k+5)$	2 pont
ezért $S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{24}$, ami azt jelenti, hogy igaz az eredeti állítás.	1 pont

221

[Vissza a feladathoz.](#)

(1) hamis (2) igaz (3) hamis (4) hamis	3 pont
---	--------

222

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 - c$	2 pont
Ha $c \leq 12$, akkor $13 - c > 0$, és így az egyenlet egy $((-2; 3)$ középpontú, $13 - c$ sugarú) kör egyenlete.	1 pont
Az állítás igaz.	1 pont
c)	
Az állítás megfordítása: Ha $x^2 + 4x + y^2 - 6y + c = 0$ egy kör egyenlete, akkor $c \leq 12$.	1 pont
Egy ellenpélda $c = 12,75$ (ekkor a kör sugara $13 - c = 0,5$).	1 pont
A megfordított állítás tehát hamis.	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

211

[Vissza a feladathoz.](#)

	A	B	C	$(A \vee B) \rightarrow C$		
	i	i	i	i		
	i	i	h	h		
	i	h	i	i		
	i	h	h	h		
	h	i	i	i		
	h	i	h	h		
	h	h	i	i		
	h	h	h	i		

3 pont

212

[Vissza a feladathoz.](#)

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2)}{n(n+2)} - \frac{n}{n(n+2)} =$	1 pont
$= \frac{2}{n^2 + 2n} =$	1 pont
$= \frac{2}{(n+1)^2 - 1}$ (tehát az állítás igaz).	1 pont

213

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
Az állítás igaz.	1 pont
$x^2 - 9x + 14 = 0$ valós gyökei 2 és 7.	1 pont
Az $x \mapsto x^2 - 9x + 14$ másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyitott” parabola, tehát ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$ teljesül.	2 pont
c)	
Megfordítás: Ha $f(x) > 0$, akkor $x > 7$.	1 pont
A megfordítás hamis.	1 pont
Egy ellenpélda. (Például $x = 0$ esetén $f(x) = 14 > 0$, de $x \leq 7$.)	1 pont

(Teljes indukcióval bizonyítunk.) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $1^2 = \frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1)}{6} = 1$	1 pont
Ha valamely $k \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz az állítás, akkor belátjuk, hogy $k + 1$ esetén is igaz, vagyis $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$	1 pont
A bal oldalon felhasználva az indukciós feltevést: $\frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$	1 pont
Mindkét oldalt $(k + 1)$ -gyel osztva ($k \neq -1$) és 6-tal szorozva: $k(2k + 1) + 6(k + 1) = (k + 2)(2k + 3)$.	1 pont
$2k^2 + k + 6k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$ Ez azonosság, minden $k \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz.	1 pont
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti állításunk minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz.	1 pont