

Deriválás és függvények érintője feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámaára kattintva találod meg.

261 | 2026. május 7./b

A valós számok halmazán értelmezett $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvénynek $x = 1$ -ben és $x = 7$ -ben lokális szélsőértéke van, lokális maximumának értéke pedig 6.

Határozza meg a b , c és d paraméterek értékét!

[8 pont]

262 | 2026. május idegen nyelvi 6./b, c

Adott az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ függvény.

- b) Írja fel az f grafikonjához az $x = 4$ koordinátájú pontjában húzott érintőegyenes egyenletét!

[5 pont]

- c) Konvex vagy konkáv az f függvény a $] - \infty; 2[$ intervallumon? Válaszát indokolja!

[3 pont]

251 | 2025. május 6./c

Határozza meg az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + bx + c$ függvény b és c paramétereinek értékét, ha tudjuk, hogy a függvénynek $x = 2$ -ben minimumhelye van, és a minimum értéke -1 .

[4 pont]

252 | 2025. október 8./b

Adott a valós számok halmazán értelmezett $g(x) = 0,5x^2 - 2x - 6$ függvény.

A g grafikonjához érintőt húzunk az $x = 4$ abszcisszájú pontjában. Határozza meg az érintő egyenletét!

[4 pont]

241 | 2024. május idegen nyelvi 3./b

Adott az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -0,5x^2 + 3x$ másodfokú függvény.

A $P(6; 0)$ pont rajta van az f grafikonján. Adja meg a grafikon P -re illeszkedő érintőjének meredekségét, és ennek az érintőnek az egyenletét!

[5 pont]

231 | 2023. május 9./b

Adott az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -x^3 + kx$ függvény (k valós paraméter). Az f függvény grafikonjához egy-egy érintőt húzunk az $x = 1$, illetve az $x = 2$ abszcisszájú pontjában.

Igazolja, hogy a két érintő metszéspontjának első koordinátája (a k paraméter értékétől függetlenül) $\frac{14}{9}$.

[8 pont]

232 | 2023. május idegen nyelvi 9./a

A valós számok halmazán értelmezett f függvény f' deriváltfüggvényének hozzárendelési szabálya: $f'(x) = (x - 2)^2 \cdot (x - 5)$.

Adja meg az f függvény összes lokális (helyi) szélsőértékének típusát és helyét!

[5 pont]

233 | 2023. május idegen nyelvi 9./c

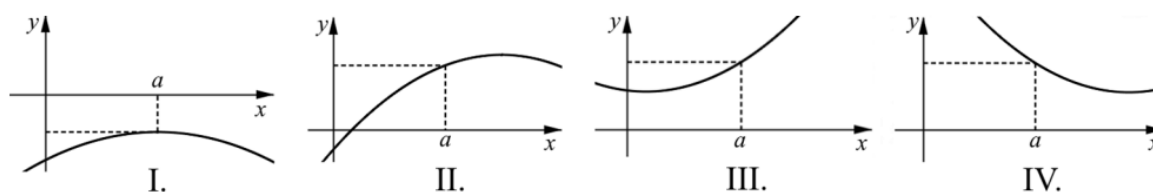
Igazolja, hogy a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; $g(x) = \frac{3x^3 + x}{x^2 + 1}$ függvény szigorúan monoton növekedő!

[6 pont]

234 | 2023. október 4./a

Adott a valós számok halmazán értelmezett másodfokú f függvény. Ismert, hogy egy adott $a \in \mathbf{R}$ helyen $f(a) > 0$, $f'(a) > 0$ és $f''(a) > 0$ mindegyike teljesül.

Az alábbi ábrákon négy másodfokú függvény grafikonja látható. Ezek alapján töltsse ki a táblázat üres mezőit aszerint, hogy a megfelelő kijelentés igaz vagy hamis, majd döntse el, hogy a négy grafikon közül melyik lehet az f függvényé! (Válaszait itt nem kell indokolnia.)



függvénygrafikon	az a helyen a függvényérték pozitív	az a helyen az első derivált értéke pozitív	az a helyen a második derivált értéke pozitív
I.		hamis	
II.			
III.			
IV.			

Az f függvény grafikonja a(z) grafikon lehet.

[6 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

235 | 2023. október 4./b

A másodfokú g függvény értékét az $x \in \mathbf{R}$ helyen a $g(x) = px^2 + qx + r$ összefüggés adja meg ($p, q, r \in \mathbf{R}, p \neq 0$). Határozza meg p, q és r értékét úgy, hogy $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ és $g''(1) = 4$ teljesüljön!

[6 pont]

221 | 2022. május idegen nyelvi 9./a

Határozza meg az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvényben az a, b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk az alábbiakat:

(1) $f(0) = 1$;

(2) $f(1) = 0$;

(3) $f'(2) = f''(1)$ (az f első deriváltjának $x = 2$ -ben vett értéke megegyezik az f második deriváltjának $x = 1$ -ben vett értékével).

[10 pont]

211 | 2021. május 7./b

A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt 45° -os szögre törekszik a dobás indításánál.

Petra dobásának modellezéséhez határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $P(0; 2)$ és a $Q(4,6; 3)$ ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig 45° ! A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban adja meg!

[8 pont]

201 | 2020. október 1./a, b

Adott két függvény:

$$f:]0; 130[\rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 900 - 0,25(x - 60)^2, \text{ illetve } g:]0; 130[\rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 6,4x.$$

Adja meg a $h:]0; 130[\rightarrow \mathbf{R}, h(x) = f(x) - g(x)$ függvény szélsőértékét (típusát, helyét és értékét)!

[6 pont]

Megoldások

261

[Vissza a feladathoz.](#)

Mivel a függvénynek 1-ben és 7-ben szélsőértéke van, ezért $g'(1) = g'(7) = 0$.	1 pont
A g deriváltfüggvénye: $g'(x) = 3x^2 + 2bx + c$.	1 pont
Felírható a következő egyenletrendszer: $g'(1) = 3 + 2b + c = 0$ $g'(7) = 147 + 14b + c = 0$.	1 pont
A második egyenletből az első kivonva kapjuk, hogy $144 + 12b = 0$, amiből $b = -12$.	1 pont
Ezt az első egyenletbe behelyettesítve, majd az egyenletet rendezve $c = 21$.	1 pont
A $g'(x) = 3x^2 - 24x + 21$ deriváltfüggvény grafikonja felfelé nyíló parabola, ezért az első derivált 1-nél pozitívból negatívba, 7-nél pedig negatívból pozitívba vált. Tehát az 1 lokális maximumhely, a 7 pedig lokális minimumhely.	2 pont
Mivel a függvény lokális maximumhelye az 1, így $g(1) = 1 - 12 \cdot 1 + 21 + d = 6$, amiből $d = -4$. (Tehát $g(x) = x^3 - 12x^2 + 21x - 4$.)	1 pont

262

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$	1 pont
A keresett érintőegyenes meredeksége: $f'(4) = 11$.	1 pont
$f(4) = 6$	1 pont
A (4; 6) ponton áthaladó, 11 meredekségű egyenes egyenlete $y = 11x - 38$.	2 pont
c)	
$f''(x) = 6x - 12$	1 pont
Ha $x \in] - \infty; 2[$, akkor $f''(x) < 0$,	1 pont
ezért f konkáv a megadott intervallumon.	1 pont

251

[Vissza a feladathoz.](#)

A függvénygrafikon egy parabola, melynek tengelypontja $(2; -1)$, így a függvény hozzárendelési szabálya $x \mapsto (x - 2)^2 - 1$.	2 pont
$(x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$,	1 pont
amiből $b = -4$ és $c = 3$.	1 pont

252

[Vissza a feladathoz.](#)

$g(4) = -6$, így az érintési pont $E(4; -6)$.	1 pont
$g'(x) = x - 2$,	1 pont
ezért a keresett érintő meredeksége $g'(4) = 2$.	1 pont
Az érintő egyenlete $y + 6 = 2(x - 4)$.	1 pont

241

[Vissza a feladathoz.](#)

Az érintő meredeksége $f'(6)$ -tal egyenlő.	1 pont
$f'(x) = -x + 3$,	1 pont
így $f'(6) = -3$.	1 pont
Az érintő egyenlete $y = -3(x - 6)$.	2 pont

231

[Vissza a feladathoz.](#)

$f'(x) = -3x^2 + k$	1 pont
Az érintőegyeneselek meredeksége: $f'(1) = k - 3$, illetve $f'(2) = k - 12$.	1 pont
Az érintési pontok $(1; k - 1)$, illetve $(2; 2k - 8)$,	1 pont
az érintők egyenlete: $y = (k - 3)(x - 1) + k - 1$,	1 pont
illetve $y = (k - 12)(x - 2) + 2k - 8$.	1 pont
A metszéspont első koordinátájára fennáll: $kx - 3x + 2 = kx - 12x + 16$.	1 pont
$x = \frac{14}{9}$	1 pont

A metszéspont első koordinátája tehát (k értékétől függetlenül) $x = \frac{14}{9}$ valóban.	1 pont
---	--------

232

[Vissza a feladathoz.](#)

Az f függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol $f'(x) = 0$,	1 pont
tehát az $x = 2$ vagy $x = 5$ helyeken.	1 pont
Az $x = 2$ helyen a deriváltfüggvény nem vált előjelet, tehát ez nem lokális szélsőérték.	1 pont
Az $x = 5$ helyen a deriváltfüggvény negatívból pozitívba megy át,	1 pont
ez tehát lokális minimumhelye a függvénynek.	1 pont

233

[Vissza a feladathoz.](#)

Be kell látni, hogy $g'(x) > 0$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén. Ebből már következik, hogy a g szigorúan monoton növekedő a teljes értelmezési tartományán.	1 pont
A hányadosfüggvény deriválási szabálya alapján: $g'(x) = \frac{(3x^3 + x)' \cdot (x^2 + 1) - (3x^3 + x) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$	1 pont
$= \frac{(9x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1) - (3x^3 + x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$	1 pont
$= \frac{(9x^4 + 10x^2 + 1) - (6x^4 + 2x^2)}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{3x^4 + 8x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$	1 pont
A számláló értéke pozitív (legalább 1), és a nevező egy pozitív szám négyzete.	1 pont
Ezért a tört pozitív, tehát $g'(x) > 0$ valóban teljesül, az állítást beláttuk.	1 pont

234

[Vissza a feladathoz.](#)

függvénygrafikon	az a helyen a függvényérték pozitív	az a helyen az első derivált értéke pozitív	az a helyen a második derivált értéke pozitív	5 pont
I.	<i>hamis</i>	<i>hamis</i>	<i>hamis</i>	
II.	<i>igaz</i>	<i>igaz</i>	<i>hamis</i>	
III.	<i>igaz</i>	<i>igaz</i>	<i>igaz</i>	
IV.	<i>igaz</i>	<i>hamis</i>	<i>igaz</i>	
Az f függvény grafikonja a III. grafikon lehet.				1 pont

235

[Vissza a feladathoz.](#)

$g'(x) = 2px + q$	1 pont
$g''(x) = 2p$	1 pont
A megadott feltételek miatt: $p + q + r = 1$, $2p + q = 2$ és $2p = 4$.	2 pont
Innen $p = 2, q = -2$ és $r = 1$ (így $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$, ami valamennyi feltételnek megfelel).	2 pont

221

[Vissza a feladathoz.](#)

$f(0) = c$, ezért $c = 1$, továbbá	1 pont
$f(1) = 0$ miatt $a + b + 2 = 0$.	1 pont
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$	1 pont
$f''(x) = 6x + 2a$	1 pont
$f'(2) = 12 + 4a + b$ és $f''(1) = 6 + 2a$	1 pont
A feltétel szerint $12 + 4a + b = 6 + 2a$,	1 pont
amiből $2a + b + 6 = 0$.	1 pont

Az $a + b + 2 = 0$ $2a + b + 6 = 0$ egyenletrendszer megoldása $a = -4, b = 2$.	2 pont
Ellenőrzés: Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ függvény minden feltételnek megfelel: $f(0) = 1,$ $f(1) = 1 - 4 + 2 + 1 = 0,$ $f'(2) = f''(1) (= -2) \text{ valóban.}$	1 pont

211

[Vissza a feladathoz.](#)

A parabola az $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek a grafikonja ($a \neq 0, b, c \in \mathbf{R}$).	1 pont
A szöveg alapján $f(0) = 2$, tehát $c = 2$.	1 pont
$f'(0) = m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$	1 pont
Mivel $f'(x) = 2ax + b$,	1 pont
ezért $f'(0) = b = 1$.	1 pont
$f(4,6) = a \cdot 4,6^2 + b \cdot 4,6 + c = 3$,	1 pont
$21,16a = -3,6$, ebből $a \approx -0,17$.	1 pont
A keresett parabola egyenlete $y = -0,17x^2 + x + 2$.	1 pont

201

[Vissza a feladathoz.](#)

$h(x) = 900 - 0,25(x - 60)^2 - 6,4x = -0,25x^2 + 23,6x$	1 pont
A h deriváltfüggvénye $h'(x) = -0,5x + 23,6$ ($0 < x < 130$).	1 pont
Ha $h'(x) = 0$, akkor $x = 47,2$,	1 pont
ha $0 < x < 47,2$, akkor $h'(x) > 0$ (h szigorúan monoton növekedő), ha $47,2 < x < 130$, akkor $h'(x) < 0$ (h szigorúan monoton csökkenő), ezért maximuma van.	1 pont
Tehát $47,2$ a h maximumhelye,	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

maximum értéke pedig $h(47,2) = 556,96$. (A függvénynek minimuma nincs.)	1 pont
---	--------