

Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. október 14.**

# MATEMATIKA

## EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

**2025. október 14. 8:00**

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

**OKTATÁSI HIVATAL**



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

--

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás,  $n!$ ,  $\binom{n}{k}$  kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\log$  és ezek inverzei), a  $\pi$  és az  $e$  szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## I.

1. a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$9^{x+1} + 78 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0$$

- b) A  $\{b_n\}$  mértani sorozat második tagja 48, ötödik tagja 162.  
Határozza meg  $n$  értékét úgy, hogy  $b_n > 10\,000\,000$  teljesüljön!

a)	6 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Egy iskolai bálra kétféleképpen lehetett jegyet venni. Aki elővételben vette meg a jegyét, az 2500 Ft-ot fizetett érte, aki pedig a helyszínen vásárolta meg, annak 3000 Ft-ba került egy jegy. Összesen 917 jegyet adtak el, amiből 2 380 000 Ft bevételhez jutottak a szervezők.

- a) Hányan vettek jegyet a helyszínen, és hányan elővételben?

A bálon a résztvevők egy nyereményjátékban próbálhatják ki a szerencséjüket. Egy medencében 40 játékhajó úszik, amelyek közül 5 nyerő. Petra 2 hajót húz ki a medencéből visszatevés nélkül. (Hogy egy hajó nyerő vagy sem, az csak a kihúzás után derül ki.)

- b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 2 hajó közül pontosan az egyik nyerő!

A bálon megrendezett vetélkedő döntőjébe Andrea, Bálint és Csilla jutott.

- c) A döntő végén hányféle sorrendben végezhet a három versenyző, ha kettes vagy hármas holtverseny is lehetséges?

a)	6 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	14 pont	

Azonosító  
jel:

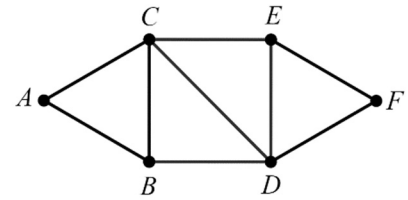
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Tekintsük az ábrán látható 6 pontú, 9 élű gráfot!

- a) Hányféle úton juthatunk el az  $A$  pontból az  $F$  pontba, ha egy-egy út során minden élen és minden csúcson legfeljebb egyszer haladhatunk át?



Az alábbi állításban  $a$ ,  $b$  és  $c$  pozitív valós számokat jelölnek:

„Ha van olyan háromszög, amelynek oldalai (centiméterben mérve)  $a$ ,  $b$ ,  $c$  hosszúak, akkor  $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 > 0$ .”

- b) Bizonyítsa be, hogy az állítás igaz!
- c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és adja meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	12 pont	



Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4. A derékszögű koordináta-rendszerben adott az  $A(-12; 21)$  és a  $B(6; -3)$  pont.

a) Adja meg a pontok által meghatározott szakasz  $f$  felezőmerőlegesének egyenletét, és számítsa ki, hány fokos szöget zár be az  $f$  egyenes az  $y$  tengellyel!

Egy 26 egység sugarú kör áthalad a  $P(24; 6)$  ponton, a középpontja pedig illeszkedik az  $y$  tengelyre.

b) Határozza meg a kör egyenletét!

a)	6 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	12 pont	



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## II.

**Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

5. Egy dobókockával hatszor dobtunk, a dobások értéke 4, 5, 4, 3, 1, 4.

a) Határozza meg a hat dobás értékének az átlagát és a szórását!

Egy szabályos dobókockával négyszer dobtunk, és a négy dobás eredményét egymás mellé írva négyjegyű számokat képeztünk.

b) Az összes így megkapható négyjegyű szám hány százalékában van legalább két egyforma számjegy?

Egy szabályos dobókockával többször dobtunk.

c) Határozza meg azt a legkisebb  $n$  egész számot, amelyre igaz, hogy  $n$  dobás között biztosan lesz legalább 3 egyforma értékű! Válaszát itt nem kell indokolnia.

Egy szabályos dobókockával addig dobtunk, amíg a dobások közt lesz 2 egyforma értékű.

d) Határozza meg a szükséges dobások számának várható értékét!

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	2 pont	
d)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Azonosító  
jel:

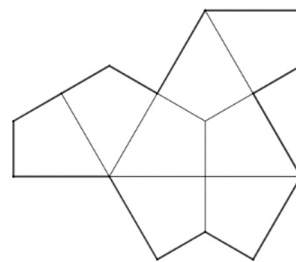
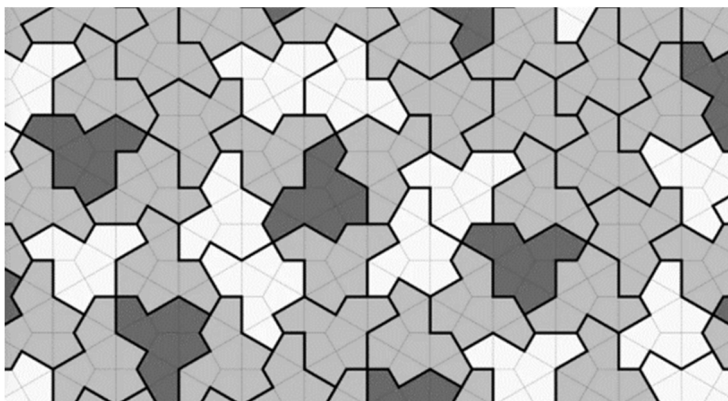
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

6. Az angol David Smith (egy 64 éves nyugalmazott nyomdagépszerelő) 2023-ban fedezte fel az első olyan, egyetlen elemből álló nemperiodikus csempézést, amellyel az ábrán látható módon fedhető le a sík.<sup>1</sup> Az általa megtalált 13 oldalú síkidom 8 darab egybevágó deltoidból állítható össze, és Smith a *kalap* nevet adta neki.



- a) Igazolja, hogy egy-egy deltoid szögei rendre  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  és  $90^\circ$ .
- b) Számítsa ki egy kalap kerületét, ha területe  $\sqrt{1728}$  területegység! Válaszát közelítő értékek használata nélkül adja meg!

Egy kalapot kiszínezzünk három adott színnel úgy, hogy egy-egy deltoid színezéséhez egy színt használunk, és két szomszédos deltoid nem lehet ugyanolyan színű. (Két deltoid szomszédos, ha van közös oldaluk.)

- c) Hányféleképpen lehet így kiszínezni az egy kalapot alkotó nyolc deltoidot?

a)	3 pont	
b)	7 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

<sup>1</sup> <https://index.hu/techtud/2023/04/01/matematika-nemismetlodo-csemppek-problema-penrose-einstein-nyugdijas-angol-smith-kalap-teknos/> (letöltés ideje: 2025.09.09.)

Csempézésnek nevezzük a sík hézagmentes és átfedések nélküli lefedését. Nemperiodikus a csempézés, ha nincs olyan része a síknak, amelynek ismételt eltolásával a végtelen sík mintázata megkapható lenne.

Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

7. Egy hajójárat üzemeltetési költsége két részből tevődik össze. Az üzemanyagköltség jó közelítéssel egyenesen arányos a hajó sebességével:  $v$  km/h sebesség esetén  $1,2v$  dukát kilométerenként. Az egyéb rezsiköltség egyenesen arányos a menetidővel: 90 dukát üzemóránként. A hajónak egy 10 km-es utat kell megtennie.

- a) Hány dukát az erre az útra eső üzemeltetési költség, ha a hajó az utat 12 km/h állandó sebességgel teszi meg?
- b) Mekkora állandó sebességgel tegye meg ezt a 10 km-es utat a hajó, hogy az útra eső üzemeltetési költség minimális legyen? Mennyi ez a minimális költség?

Egy Révfülöpről Balatonboglárra tartó hajójáraton 50-en utaztak, ők átlagosan 1650 Ft-ot fizettek egy jegyért. Visszafelé Balatonboglárról Révfülöpre 70-en utaztak ugyanezen a hajón, és ők átlagosan 1500 Ft-ot fizettek egy jegyért.

- c) A két utat tekintve átlagosan mennyibe került egy jegy?

a)	4 pont	
b)	9 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

- 8.** A valós számok halmazán értelmezett  $f$  másodfokú függvény zérushelyei  $-3$  és  $4$ .  
Az  $f$  grafikonja egy olyan parabola, amely az  $y$  tengelyt a  $(0; 6)$  pontban metszi.

**a)** Határozza meg a parabola egyenletét!

Adott a valós számok halmazán értelmezett  $g(x) = 0,5x^2 - 2x - 6$  függvény.

**b)** A  $g$  grafikonjához érintőt húzunk az  $x = 4$  abszcisszájú pontjában. Határozza meg az érintő egyenletét!

**c)** Számítsa ki az  $y = -2x + 2$  egyenletű egyenes és az  $y = 0,5x^2 - 2x - 6$  egyenletű parabola által határolt korlátos síkidom területét!

<b>a)</b>	5 pont	
<b>b)</b>	4 pont	
<b>c)</b>	7 pont	
<b>Ö.:</b>	16 pont	



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

**9.** A TAJ szám (társadalombiztosítási azonosító jel) egy 9 karakterből álló azonosító kód, amelyben az első 8 karakter egy-egy számjegy, a kilencedik karakter pedig az első 8 számjegyből képzett ellenőrző számjegy. Az ellenőrző számjegy képzési szabálya: az első nyolc számjegy közül (előlről nézve) a páratlan sorszámú helyeken álló számjegyeket 3-mal, a páros sorszámú helyeken állókat pedig 7-tel szorozzuk. E szorzatok összegének utolsó számjegye lesz az ellenőrző számjegy.

- a) Határozza meg a TAJ szám ellenőrző számjegyet, ha az első nyolc számjegy 24165379.
- b) Egy TAJ szám első számjegyet letakartuk, így az  $\_14564797$  számsor látható. Határozza meg a letakart számjegyet!
- c) Határozza meg az ellenőrző számjegy lehetséges értékeit abban a TAJ számban, amely  $02563abba$  alakú! ( $a$  és  $b$  nem szükségképpen különböző számjegyek.)

Egy iskolai nyilvántartásban (gépi adatrögzítési hiba miatt) a rögzített TAJ számok 1,5%-a hibás. (Ezt tekinthetjük úgy, hogy egy tetszőleges TAJ szám 0,015 valószínűséggel lesz hibás.) Lekerünk 20 TAJ számot a nyilvántartásból.

- d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egynél több hibás lesz közöttük?

a)	2 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---



Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

	a feladat sorszám	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	13		51	
	2.	14			
	3.	12			
	4.	12			
II. rész		16		64	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
<b>Az írásbeli vizsgarész pontszáma</b>				<b>115</b>	

\_\_\_\_\_ dátum

\_\_\_\_\_ javító tanár

	pontszáma <b>egész számra</b> kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

\_\_\_\_\_ dátum

\_\_\_\_\_ dátum

\_\_\_\_\_ javító tanár

\_\_\_\_\_ jegyző