ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. október 14.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
$78\cdot 3^{x-1}=26\cdot 3^{x}$, ezért az egyenlet így is felírható: $9\cdot 9^{x}+26\cdot 3^{x}-3=0$.	1 pont	
Mivel $9^{x}=(3^{x})^{2}$, ezért az egyenlet 3^{x}-ben másodfokú,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
amelynek megoldásai a –3 és az $\frac{1}{9}$.	1 pont	
A $3^{x}=-3$ egyenletnek nincs megoldása.	1 pont	
A $3^{x}=\frac{1}{9}$ egyenlet megoldása $x=-2$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b)		
Jelölje q a sorozat hányadosát, ekkor ($b_5=b_2\cdot q^3$, azaz) $162=48\cdot q^3$,	1 pont	
innen $q=1{,}5$.	1 pont	
$b_1=\frac{b_2}{q}=\frac{48}{1{,}5}=32$	1 pont	$b_n=b_2\cdot q^{n-2}=48\cdot 1{,}5^{n-2}$ $48\cdot 1{,}5^{n-2}>10^{7}$
($b_n=32\cdot 1{,}5^{n-1}$, így) megoldandó a $32\cdot 1{,}5^{n-1}>10^{7}$, azaz $1{,}5^{n-1}>312\,500$ egyenlőtlenség ($n\in\mathbf{N}$).	1 pont	
Az 1,5 alapú logaritmusfüggvény / exponenciális függvény szigorúan monoton nő,	1 pont	
ezért $n-1>\log_{1,5}312\,500\approx 31{,}2$.	1 pont	
$n>32{,}2$ (azaz a sorozat 32-nél nagyobb indexű tagjai nagyobbak, mint 10^7).	1 pont	$n\geq 33$ ($n\in\mathbf{N}$)
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó (észszerű és helyes kerekítésekkel) felsorolja a sorozat tagjait, és ez alapján helyesen válaszol, de nem hivatkozik a szigorú monotonitásra, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.

2. Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel dolgozik, de nem hivatkozik a szigorú monoton növekedésre, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.

2. a) első megoldás		
Az elővételben vásárolt jegyek számát jelölje x, ekkor a helyszínen vásárolt jegyek száma $917 - x$.	1 pont	
$2500x + 3000 \cdot (917 - x) = 2\,380\,000$	1 pont	
$2500x + 2\,751\,000 - 3000x = 2\,380\,000$ $371\,000 = 500x$	1 pont	
Ebből $x = 742$ (jegyet vettek meg elővételben),	1 pont	
és $(917 - 742 =)$ 175 jegyet vettek meg a helyszínen.	1 pont	
Ellenőrzés: $2500 \cdot 742 + 3000 \cdot 175 = 2\,380\,000$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. a) második megoldás		
Az elővételben vásárolt jegyek számát jelölje x, a helyszínen vásárolt jegyek számát y. Megoldandó az alábbi egyenletrendszer: $\begin{cases} x + y = 917 \\ 2500x + 3000y = 2\,380\,000. \end{cases}$	2 pont	
Az első egyenletet 5-tel szorozva, a második egyen- letet 500-zal osztva: $\begin{cases} 5x + 5y = 4585 \\ 5x + 6y = 4760. \end{cases}$	1 pont	
A második egyenletből kivonva az elsőt: $y = 175$ (jegyet vettek meg a helyszínen).	1 pont	
Innen $x = (917 - 175 =)$ 742 (jegyet vettek meg elő- vételben).	1 pont	
Ellenőrzés: $(742 + 175 = 917$ és$)$ $2500 \cdot 742 + 3000 \cdot 175 = 2\,380\,000$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b) **első megoldás**		
(Ha a húzások sorrendjét nem vesszük figyelembe, akkor) a 40 hajó közül kettőt $\binom{40}{2}$ (= 780)-féleképpen lehet kihúzni (összes eset száma).	1 pont	*(A húzások sorrendjét figyelembe véve:)* $40 \cdot 39$ (= 1560).
(A hajók között 35 nem nyerő van.) Egy nyerő és egy nem nyerő hajót $\binom{5}{1}\binom{35}{1}$ (= 175)-féleképpen lehet kihúzni (kedvező esetek száma).	1 pont	$5 \cdot 35 + 35 \cdot 5$ (= 350)
A kérdezett valószínűség így $\dfrac{\binom{5}{1}\binom{35}{1}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{175}{780} = \dfrac{35}{156} \approx 0{,}224.$	1 pont	$\dfrac{350}{1560} \approx 0{,}224$
Összesen:	**3 pont**	

2. b) **második megoldás**		
Elsőre nyerő, majd másodikra nem nyerő hajót $\frac{5}{40} \cdot \frac{35}{39}$ ($\approx 0{,}112$) valószínűséggel,	1 pont	
míg elsőre nem nyerő, majd másodikra nyerő hajót $\frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39}$ ($\approx 0{,}112$) valószínűséggel húz ki Petra.	1 pont	
A kérdezett valószínűség így $\left(\frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39} + \frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39} =\right) \frac{35}{156} \approx 0{,}224.$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. c)		
Ha nincs holtverseny, akkor 3! = 6-féle sorrend lehetséges.	1 pont	
Ha az 1–2. helyen holtverseny van, akkor 3-féle sorrend lehetséges például aszerint, hogy ki lesz a harmadik helyezett,	1 pont	*Ha kettes holtverseny van, akkor a két érintett versenyző 3-féleképpen, a hely (1-2. vagy 2-3.) pedig 2-féleképpen választható ki.*
és ugyanígy 3-féle sorrend lehetséges, ha a 2–3. helyen van holtverseny.	1 pont	
Végül lehetséges a hármas holtverseny is, ez 1 lehetőség.	1 pont	
Összesen tehát ($6 + 2 \cdot 3 + 1 =$) 13-féle sorrendben végezhetett a három versenyző.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja a lehetséges sorrendeket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

3. a) első megoldás		
Felsoroljuk a megfelelő utakat (például az utak hossza alapján). 3 hosszú utak: *ABDF*, *ACDF*, *ACEF* (3 lehetőség). 4 hosszú utak: *ABCDF*, *ABCEF*, *ABDEF, ACBDF*, *ACDEF*, *ACEDF* (6 lehetőség). 5 hosszú utak: *ABCDEF*, *ABCEDF*, *ABDCEF*, *ACBDEF* (4 lehetőség).	4 pont	
Összesen (3 + 6 + 4 =) 13 megfelelő út van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Felsorolás esetén 3–5 megfelelő út megtalálása 1 pontot, 6–8 megfelelő út megtalálása 2 pontot, 9–10 megfelelő út megtalálása 3 pontot, 11–12 megfelelő út megtalálása 4 pontot ér.

3. a) második megoldás		
(Esetszétválasztást végzünk az alapján, hogy a *CD* él része az útnak vagy sem.) I. eset: ha *CD* nem szerepel a bejárásban. Ekkor *AC* kezdéssel 4 megfelelő út van. (*C*-ből 2-felé mehetünk, és a *CE* és *CBD* utak is 2-féleképpen fejezhetők be.)	1 pont	
A szimmetrikus helyzet miatt *AB* kezdéssel is 4 út lehetséges.	1 pont	
II. eset: ha *CD* szerepel a bejárásban. A $C \to D$ irány esetén *C*-be 2-féleképpen juthatunk el (*A*-ból vagy *B*-ből), és *D*-ből 2-féleképpen fejezhetjük be az utat (*DF* vagy *DEF*). Ez $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség.	1 pont	
A $D \to C$ irány esetén *D*-be csak az *ABD* úton juthatunk el, és *C*-ből is egyértelmű a befejezés (*CEF*), így ekkor 1 lehetőség van.	1 pont	
A megfelelő utak száma tehát $2 \cdot 4 + 4 + 1 = 13$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a) harmadik megoldás		
(Esetszétválasztást végzünk az alapján, hogy kezdetben *A*-ból *B* vagy *C* felé indulunk.) I. eset: *ABC* kezdés esetén 4 megfelelő út van (*E*-ből és *D*-ből is 2-2 befejezés lehetséges).	1 pont	
II. eset: *ABD* kezdés esetén 3 megfelelő út van (folytathatjuk *C*-vel, *E*-vel vagy *F*-fel).	1 pont	
III. eset: *ACB* kezdés esetén *D*-vel kell folytatnunk, innen 2 befejezés lehetséges (*E* vagy *F* folytatás).	1 pont	
IV. eset: *ACD* vagy *ACE* kezdés esetén egyaránt 2-2 befejezés lehetséges (*E* vagy *F*, illetve *D* vagy *F* folytatás).	1 pont	
A megfelelő utak száma tehát $4 + 3 + 2 + 2 \cdot 2 = 13$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b) **első megoldás**		
$a^2+2ab+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2=$	1 pont	
$=(a+b+c)(a+b-c)$	1 pont	
A háromszög-egyenlőtlenség miatt $a+b>c$ teljesül,	1 pont	
így a szorzat mindkét tényezője pozitív, tehát az állítás valóban igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

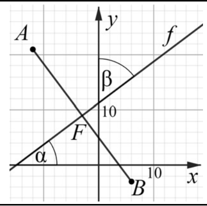
3. b) **második megoldás**		
A koszinusztételből $a^2+b^2-c^2=2ab\cos\gamma$, így	1 pont	
$a^2+2ab+b^2-c^2=2ab+2ab\cos\gamma=2ab(1+\cos\gamma)$.	1 pont	
Tetszőleges háromszögben $-1<\cos\gamma<1$,	1 pont	
így a szorzat minden tényezője pozitív, tehát az állítás valóban igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b) **harmadik megoldás**		
A bizonyítandó egyenlőtlenséget átrendezve: $a^2+2ab+b^2>c^2$, azaz $(a+b)^2>c^2$.	1 pont	
Mivel $a+b$ és c is pozitív, ezért $a+b>c$,	1 pont	
ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesül.	1 pont	
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti állítás is valóban igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

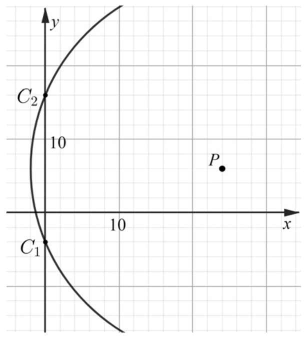
3. c)		
Az állítás megfordítása: „Ha (az a, b és c pozitív valós számokra teljesül, hogy) $a^2+b^2+2ab-c^2>0$, akkor van olyan háromszög, amelynek az oldalai (cm-ben) a, b, c hosszúak.”	1 pont	
Az állítás hamis.	1 pont	
Egy ellenpélda (például $a=2$, $b=1$, $c=1$).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

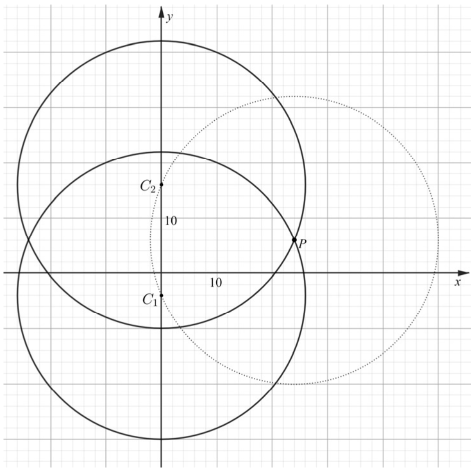
4. a)		
Az AB szakasz F felezőpontjának koordinátái (–3; 9).	1 pont	
$\overrightarrow{AB} = (18; -24)$, így f egy normálvektora pl. (3; –4).	1 pont	*f meredeksége* $\frac{3}{4}$.
f: $3x - 4y = (3 \cdot (-3) - 4 \cdot 9 =) -45$.	1 pont	f: $y - 9 = \frac{3}{4}(x+3)$ $\left(y = \frac{3}{4}x + \frac{45}{4}\right)$
Jelölje α az f egyenes és az x tengely által bezárt szöget (f irányszögét). Ekkor $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$,	1 pont*	
innen $\alpha \approx 36{,}9°$.	1 pont*	
Az y tengely és f bezárt szöge α pótszöge, kb. 53,1°.	1 pont*	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az f egyenes tengelymetszetei (–15; 0) és (0; 11,25).	1 pont	
Jelölje β az f egyenes és az y tengely bezárt szögét, ekkor $\operatorname{tg}\beta = \frac{15}{11{,}25}$,	1 pont	
innen $\beta \approx 53{,}1°$.	1 pont	

4. b) **első megoldás**		
A keresett kör középpontja legyen $C(0; v)$, ekkor a kör egyenlete $x^2 + (y-v)^2 = 26^2$.	1 pont	*CP* = 26, *így* $\sqrt{24^2 + (6-v)^2} = 26$.
(P rajta van a körön, ezért) $24^2 + (6-v)^2 = 26^2$.	1 pont	
Ebből $(6-v)^2 = 100$, innen $6 - v = 10$ vagy $6 - v = -10$.	1 pont	$v^2 - 12v - 64 = 0$
$v = -4$ vagy $v = 16$ (tehát $C_1(0; -4)$ vagy $C_2(0; 16)$).	1 pont	
A keresett kör egyenlete: $x^2 + (y+4)^2 = 26^2$ vagy $x^2 + (y-16)^2 = 26^2$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. b) második megoldás		
A keresett kör C középpontját a P középpontú, 26 egység sugarú kör metszi ki az y tengelyből. Ennek egyenlete $(x-24)^2+(y-6)^2=26^2$.	1 pont	
(Az y tengely és a kör metszéspontjának meghatáro-zása:) Ha $x = 0$, akkor $24^2+(y-6)^2=26^2$.	1 pont	
Ebből $(y-6)^2=100$, innen pedig $y - 6 = -10$ vagy $y - 6 = 10$.	1 pont	
$y = -4$ vagy $y = 16$ (tehát $C_1(0; -4)$ vagy $C_2(0; 16)$).	1 pont	
A keresett kör egyenlete: $x^2+(y+4)^2=26^2$ vagy $x^2+(y-16)^2=26^2$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	



II.

5. a)		
A hat dobás átlaga $\left(\frac{4+5+4+3+1+4}{6}=\right)3,5$.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó az átlagot, illetve a szórást számológéppel helyesen határozza meg.*
A szórás $\sqrt{\frac{1,5^2+4\cdot 0,5^2+2,5^2}{6}}=\sqrt{\frac{19}{12}}\approx 1,26$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b)		
Összesen $6^4 = 1296$ különböző négyjegyű számot kaphatunk.	1 pont	
Komplementer módszerrel dolgozunk.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a meg-oldásból derül ki.*
Ezek közül nem felelnek meg azok, amelyek csupa különböző számjegyből állnak. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ ilyen számot kaphatunk.	1 pont*	

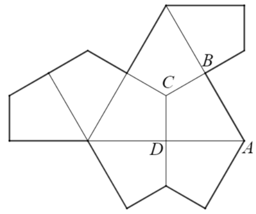
Tehát (1296 – 360 =) 936 megfelelő szám van.	1 pont*	
(Mivel $\frac{936}{1296} \approx 0{,}722$, így) ez az összes ilyen módon megkapható négyjegyű számnak a 72,2 százaléka.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

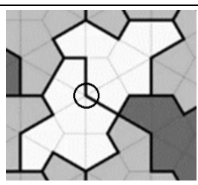
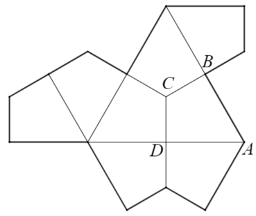
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

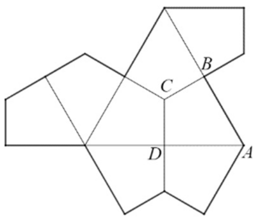
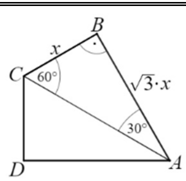
6 olyan számot kaphatunk, amelynek mind a négy számjegye egyforma. $\binom{4}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 120$ olyan számot kaphatunk, amelynek pontosan három számjegye egyforma. $\binom{4}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ olyan számot kaphatunk, amelynek pontosan két számjegye egyforma. $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} = 90$ olyan számot kaphatunk, amelynek két-két számjegye egyforma.	2 pont	
Tehát (6 + 120 + 720 + 90 =) 936 megfelelő szám van.	1 pont	

5. c)		
$n = 13$ (A dobókockával 6-félét dobhatunk, így a skatulyaelv miatt $6 \cdot 2 + 1 = 13$ dobás között már biztosan lesz legalább 3 egyforma.)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

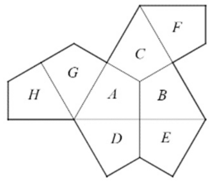
5. d)		
Legalább 2 dobásra szükség van, és legkésőbb a 7. dobásra biztosan lesz két egyforma.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$P(n)$ jelölje annak a valószínűségét, hogy n dobásra van szükség. (Elsőre bármit dobhatunk.) $P(2) = \frac{1}{6}$, $P(3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{18}$, $P(4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$, $P(5) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{27}$, $P(6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{324}$, $P(7) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \left(= 1 - \sum_{i=2}^{6} P(i) \right) = \frac{5}{324}$.	3 pont	
A dobások számának várható értéke: $\sum_{i=2}^{7} P(i) \cdot i = \frac{1223}{324} \approx 3{,}775$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

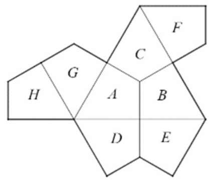
6. a) első megoldás		
Az *ABCD* deltoid *C* csúcsnál lévő szöge $360° : 3 = 120°$.	1 pont	
A deltoid *B* és *D* csúcsánál levő szögei $360° : 4 = 90°$-osak,	1 pont	
így az *A* csúcsnál lévő szöge $(360° - 120° - 2 \cdot 90° =)$ $60°$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. a) második megoldás		
A legkisebb szögből hat darab 360°-ot ad, így egy ilyen szög nagysága 60°. 	1 pont	
A deltoid *B* és *D* csúcsánál levő szögei $360° : 4 = 90°$-osak.	1 pont	
Ezért a deltoid *C* csúcsnál lévő szöge $(360° - 60° - 2 \cdot 90° =)$ $120°$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

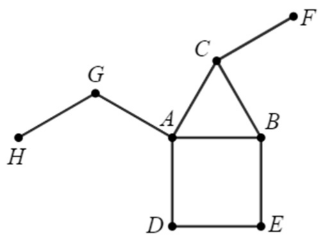
6. b)		
A kalap kerülete 6 darab *AB* oldallal és 8 darab *BC* oldallal egyenlő hosszúságú szakaszból áll ($k = 6 \cdot AB + 8 \cdot BC$). 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Egy deltoid területe $\frac{\sqrt{1728}}{8}$ $(= 3\sqrt{3})$.	1 pont	
Az *ABCD* deltoidot az *AC* átlója két egybevágó, fél szabályos háromszögre bontja, ezért ha a *BC* oldal hossza *x*, akkor az *AB* oldal hossza $\sqrt{3} \cdot x$. 	1 pont	$\frac{AB}{BC} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, *ezért ha* $BC = x$, *akkor* $AB = \sqrt{3} \cdot x$.
A deltoid területe a fél szabályos háromszög területének kétszerese, ezért $3\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{x \cdot \sqrt{3} \cdot x}{2}$,	2 pont	
amiből $x^2 = 3$, azaz $x = \sqrt{3}$.	1 pont	
Tehát a kalap kerülete $6 \cdot \sqrt{3} \cdot x + 8 \cdot x = 18 + 8\sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megoldásában közelítő értékeket is felhasznál, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.

6. c) **első megoldás**		
Az ábrán A, B és C betűvel jelölt deltoidokat három különböző színnel kell kiszínezni,	1 pont	
ezt 3! = 6-féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
F, G és H színe egyenként 2-féle lehet. (F különbözik C-től, G különbözik A-tól, H különbözik G-től.)	1 pont	
A D színétől függően két eset lehetséges. I. eset: Ha D és B ugyanolyan színű, akkor E színe 2-féle lehet (D és B közös színétől különböző). Ez 2 eset.	1 pont	
II. eset: Ha D és B különböző színű, akkor E színe csak egyféle lehet (A színével megegyező). Ez 1 eset.	1 pont	
Tehát összesen $6 \cdot 2^3 \cdot (2 + 1) = 144$-féleképpen lehet kiszínezni a kalapot.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c) **második megoldás**		
Az F deltoid színe 3-féle lehet, a C színe ezután 2-féle.	1 pont	
Az A, B és C deltoidok színe egymástól különböző, így A színe 2-féle lehet (C színétől különböző). Ezután B színe már egyértelműen meghatározott.	1 pont	
A D színétől függően két eset lehetséges. I. eset: Ha D és B ugyanolyan színű, akkor E színe 2-féle lehet (D és B közös színétől különböző). Ez 2 eset.	1 pont	
II. eset: Ha D és B különböző színű, akkor E színe csak egyféle lehet (A színével megegyező). Ez 1 eset.	1 pont	
G és H színe egyenként 2-féle lehet (G különbözik A-tól, H különbözik G-től).	1 pont	
Tehát összesen $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 + 1) \cdot 2^2 = 144$-féleképpen lehet kiszínezni a kalapot.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: A kalap deltoidjait szemléltethetjük egy 8 pontú gráf pontjaival. Ekkor az élek a szomszédsági kapcsolatot jelölik, és a feladat szerint úgy kell a gráf pontjait kiszínezni, hogy egy-egy él végpontjai különböző színűek legyenek.



7. a)		
A 10 km-re eső üzemanyagköltség 12 km/h sebesség esetén $10 \cdot 1,2 \cdot 12 = 144$ dukát.	1 pont	
12 km/h sebességgel a 10 km-es utat $\frac{10}{12}$ óra alatt teszi meg a hajó,	1 pont	
az erre eső rezsiköltség $\frac{10}{12} \cdot 90 = 75$ dukát.	1 pont	
A 10 km-es útra eső teljes üzemeltetési költség tehát 12 km/h sebesség esetén (144 + 75 =) 219 dukát.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b)		
A 10 km-re eső üzemanyagköltség v km/h sebesség esetén $10 \cdot 1,2v = 12v$ dukát.	1 pont	
A hajó v km/h állandó sebességgel a 10 km-es utat $\frac{10}{v}$ óra alatt teszi meg,	1 pont	
a rezsiköltség ezért $\frac{10}{v} \cdot 90 = \frac{900}{v}$ dukát.	1 pont	
A 10 km-es útra eső teljes üzemeltetési költség tehát v km/h állandó sebesség esetén $12v + \frac{900}{v}$ dukát.	1 pont	
Az f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(v) = 12v + \frac{900}{v}$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(v) = 12 - \frac{900}{v^2} = 0$	1 pont*	
innen $v = \sqrt{\frac{900}{12}} = \sqrt{75} \approx 8,66$ km/h (mert $v > 0$).	1 pont*	
Az f' függvény értéke $v < \sqrt{75}$ esetén negatív, $v > \sqrt{75}$ esetén pedig pozitív, így a $\sqrt{75}$ valóban (abszolút) minimumhelye f-nek.	1 pont*	$f''(v) = \frac{1800}{v^3} > 0$
A 10 km-re eső teljes üzemeltetési költség tehát 8,66 km/h sebesség esetén minimális, kb. 208 dukát.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

*A *-gal jelölt pontokat a vizsgázó a következő gondolatmenetért is megkaphatja:*

A (pozitív számokra felírt) számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt $12v+\frac{900}{v}\geq 2\cdot\sqrt{12v\cdot\frac{900}{v}}=120\sqrt{3}\approx 207{,}8$.	2 pont	
Egyenlőség (és az üzemeltetési költségnek minimuma) pontosan akkor van, ha $12v=\frac{900}{v}$,	1 pont	
azaz $v^2=75$, $v=5\sqrt{3}$ (mert $v>0$).	1 pont	

7. c)		
Az első úton összesen $50\cdot 1650$ (= 82 500) Ft-ot,	1 pont	
a második úton összesen $70\cdot 1500$ (= 105 000) Ft-ot fizettek az utasok a jegyekért.	1 pont	
A két utat tekintve átlagosan $\frac{82\,500+105\,000}{50+70}=1562{,}5$ Ft-ba került egy jegy.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. a) első megoldás		
A parabola egyenletét az $y=ax^2+bx+c$ (általános) alakban keressük. $f(0)=6$, innen $c=6$. $f(-3)=0$ és $f(4)=0$, innen $9a-3b+6=0$ és $16a+4b+6=0$.	2 pont	
A $\begin{cases}9a-3b+6=0\\16a+4b+6=0\end{cases}$ egyenletrendszer első egyenletéből $b=3a+2$.	1 pont	
Ezt a második egyenletbe helyettesítve $28a+14=0$, azaz $a=-0{,}5$, és így $b=3\cdot(-0{,}5)+2=0{,}5$.	1 pont	
A parabola egyenlete $y=-0{,}5x^2+0{,}5x+6$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. a) második megoldás		
Felhasználva az f megadott zérushelyeit, a parabola egyenletét az $y=a(x+3)(x-4)$ alakban keressük.	2 pont	
$f(0)=6$, innen $6=-12a$, azaz $a=-0{,}5$.	2 pont	
A parabola egyenlete $y=-0{,}5(x+3)(x-4)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

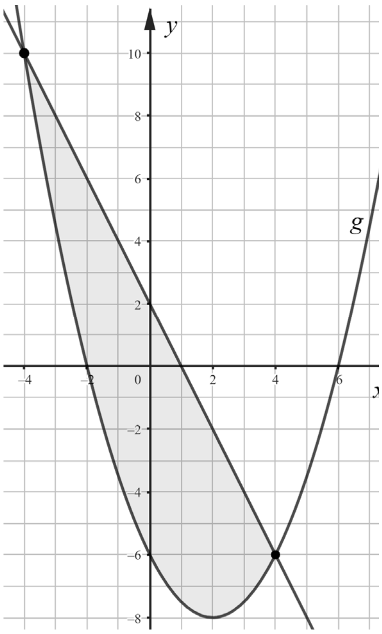
8. a) **harmadik megoldás**		
A parabola egyenletét az $y = ax^2 + bx + c$ (általános) alakban keressük. (Mivel az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökei a feladat szerint –3 és 4, ezért) a Viète-formulák alapján a két gyök összege $-\frac{b}{a} = 1$, a két gyök szorzata pedig $\frac{c}{a} = -12$.	2 pont	
$f(0) = 6$, innen $c = 6$.	1 pont	
Ezt a második egyenletbe beírva $a = -0{,}5$, majd az első egyenlet alapján ebből $b = 0{,}5$ adódik.	1 pont	
A parabola egyenlete $y = -0{,}5x^2 + 0{,}5x + 6$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. a) **negyedik megoldás**		
A parabola egyenletét az $y = a(x-u)^2 + v$ (transzformációs) alakban keressük, ahol u értékét a zérushelyek számtani közepe adja: $u = \frac{-3+4}{2} = 0{,}5$.	2 pont	
$f(0) = 6$, azaz $0{,}25a + v = 6$, és $f(4) = 0$, azaz $12{,}25a + v = 0$.	1 pont	
A két egyenlet különbségéből adódik, hogy $12a = -6$, azaz $a = -0{,}5$, és így $v = 6 - 0{,}25 \cdot (-0{,}5) = 6{,}125$.	1 pont	
A parabola egyenlete $y = -0{,}5(x-0{,}5)^2 + 6{,}125$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. b)		
$g(4) = -6$, így az érintési pont $E(4; -6)$.	1 pont	
$g'(x) = x - 2$,	1 pont	
ezért a keresett érintő meredeksége $g'(4) = 2$.	1 pont	
Az érintő egyenlete $y + 6 = 2(x - 4)$.	1 pont	$y = 2x - 14$
Összesen:	**4 pont**	

8. c)		
A görbék metszéspontjainak első koordinátáját a $-2x + 2 = 0{,}5x^2 - 2x - 6$ egyenlet megoldásai adják.	1 pont	
Rendezés után $x^2 = 16$,	1 pont	
ennek a gyökei –4 és 4.	1 pont	

(Mivel az egyenes a [–4; 4] intervallumon a parabola „fölött” helyezkedik el, ezért) $T=\int_{-4}^{4}(-2x+2-0,5x^2+2x+6)\mathrm{d}x=\int_{-4}^{4}(-0,5x^2+8)\mathrm{d}x=$	1 pont	
$=\left[\dfrac{-0,5x^3}{3}+8x\right]_{-4}^{4}=$	1 pont	
$=\left(\dfrac{-32}{3}+32\right)-\left(\dfrac{32}{3}-32\right)=$	1 pont	
$=\dfrac{128}{3}$. (A síkidom területe tehát $\dfrac{128}{3}\approx 42{,}67$ területegység.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	



9. a)		
$3\cdot(2+1+5+7)+7\cdot(4+6+3+9)=199$	1 pont	
Az ellenőrző számjegy tehát 9.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9. b)		
Jelölje az első számjegyet x, ekkor $3\cdot(x+4+6+7)+7\cdot(1+5+4+9)=$	1 pont	
$=3x+184$.	1 pont	
Ennek az ellenőrző számjegy alapján 7-re kell végződnie, tehát $3x$-nek 3-ra kell végződnie.	1 pont	
Ez csak akkor lehet, ha $x=1$ (mivel x számjegy).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c)		
$3 \cdot (0 + 5 + 3 + b) + 7 \cdot (2 + 6 + a + b) =$	1 pont	
$= 80 + 7a + 10b$	1 pont	
(Mivel $10b + 80$ végződése 0, és az ellenőrző számjegy értéke a, ezért) $7a$ utolsó számjegye a.	1 pont	
Ez akkor lehetséges, ha $a = 0$,	1 pont	
vagy $a = 5$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: b mindkét esetben tetszőleges számjegy lehet.

9. d) első megoldás		
Annak a valószínűsége, hogy egy TAJ szám nem hibás: 0,985.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy a 20 darab TAJ számból egy sem hibás: $0{,}985^{20} \approx 0{,}739$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a 20 darab TAJ számból pontosan egy hibás: $20 \cdot 0{,}985^{19} \cdot 0{,}015 \approx 0{,}225$.	2 pont	
A kérdezett valószínűség (komplementer módszerrel számolva) így $1 - 0{,}739 - 0{,}225 \approx 0{,}036$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. d) második megoldás		
Annak a valószínűsége, hogy egy TAJ szám nem hibás: 0,985.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Jelölje $P(i)$ annak a valószínűségét, hogy a 20 darab TAJ számból pontosan i darab hibás. $P(2) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}985^{18} \cdot 0{,}015^{2} \approx 0{,}0326$ $P(3) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}985^{17} \cdot 0{,}015^{3} \approx 0{,}0030$ $P(4) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}985^{16} \cdot 0{,}015^{4} \approx 0{,}0002$	2 pont	
(Mivel $P(5) = \binom{20}{5} \cdot 0{,}985^{15} \cdot 0{,}015^{5} \approx 0{,}00001$, ezért) annak a valószínűsége már elhanyagolható, hogy a 20 darab TAJ számból 4-nél több hibás.	1 pont	
A kérdezett valószínűség így ($0{,}0326 + 0{,}0030 + 0{,}0002 \approx$) 0,036.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	