ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2026. október 13.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A hatványozás azonosságait felhasználva: $(2^x)^2 - 10 \cdot \frac{2^x}{2} = 24.$	1 pont	
A $2^x = a$ új ismeretlent bevezetve ($a > 0$) és az egyenletet rendezve: $a^2 - 5a - 24 = 0.$	1 pont	
Az egyenlet megoldásai: $a_1 = 8$ és $a_2 = -3.$	1 pont	
Ha $2^x = 8$, akkor (az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x = 3.$	1 pont	
A $2^x = -3$ egyenletnek nincs valós megoldása.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy (a $2^x > 0$ feltétel figyelembevételével) ekvivalenciára való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

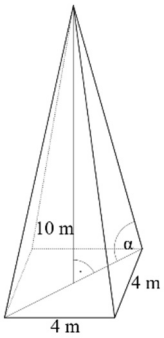
1. b)		
(Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha az egyik tényezője 0.) Így $\frac{1}{2} - \cos x = 0$ vagy $\sin 2x = 0.$	1 pont	
Ha $\frac{1}{2} - \cos x = 0$, akkor $\cos x = \frac{1}{2}.$	1 pont	
A megadott intervallumon $x = \frac{\pi}{3}.$	1 pont	
Ha $\sin 2x = 0$, akkor $2x = k \cdot \pi,$	1 pont	$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 0$
így $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$).	1 pont	$\sin x = 0$ *vagy* $\cos x = 0$
A megadott intervallumon $x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$ vagy $x = \pi.$	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

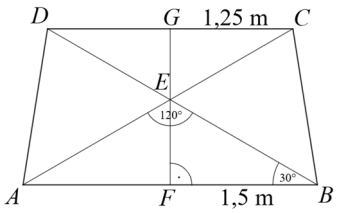
Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a válaszát fokban adja meg, akkor ezért 1 pontot veszítsen.
2. Ha a vizsgázó a válaszát a valós számok halmazán adja meg, akkor ezért 2 pontot veszítsen.

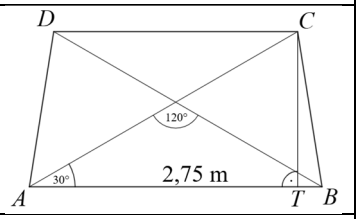
2. a)		
A 38 nem fordulhat elő,	1 pont	
mert 3 út teljesítésével legfeljebb 36 pont szerezhető, 4 út teljesítésével pedig legalább 40.	1 pont	
A 68 előfordulhat,	1 pont	
ha a versenyző 6 utat teljesít, ezek közül 4-et első próbálkozásra.	1 pont	$2 \cdot 10 + 4 \cdot 12 = 68$
Összesen:	**4 pont**	

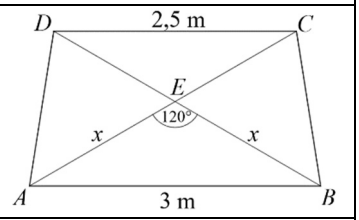
2. b)		
Egy pontozólap minden sorában három helyre kerülhet az X jel,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így 3^{20} (= 3 486 784 401)-féleképpen tölthető ki egy pontozólap.	1 pont	
Ez a kért kerekítéssel 3 487 000 000 (3487 millió) lehetőség.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. c)		
1. eset: Ha a versenyző mind a 20 utat teljesíti, akkor ezzel szerez 200 pontot. A 200 ponton felüli 18 pontot (18 : 2 =) 9 út első teljesítésével szerezheti meg.	1 pont	$11 \cdot 10 + 9 \cdot 12 = 218$
Az első próbálkozásra teljesített utak kiválasztására ekkor $\binom{20}{9} (= 167\ 960)$ lehetőség van.	1 pont	$\binom{20}{11}$
2. eset: Ha a versenyző 19 utat teljesít (1-et pedig nem), akkor ezzel szerez 190 pontot. A 190 ponton felüli 28 pontot (28 : 2 =) 14 út első teljesítésével szerezheti meg.	1 pont	$5 \cdot 10 + 14 \cdot 12 = 218$
A nem teljesített út és az első próbálkozásra teljesített utak kiválasztására ekkor $\binom{20}{1} \cdot \binom{19}{14} (= 232\ 560)$ lehetőség van.	1 pont	$\binom{20}{14} \cdot \binom{6}{5} = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{14}$
Ha egy versenyző 19-nél kevesebb utat teljesít, akkor legfeljebb (18 · 12 =) 216 pontot szerezhet.	1 pont	
Tehát összesen 167 960 + 232 560 = 400 520-féleképpen lehet kitöltve a pontozólap.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

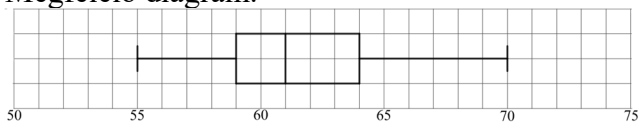
3. a)		
(A gúla csúcsának az alaplapra eső merőleges vetülete az alaplap középpontja.) A négyzet középpontja $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ (≈ 2,83) méter távolságra van az alaplap csúcsaitól. 	2 pont	
A keresett szöget α-val jelölve $\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{2\sqrt{2}} \approx 3{,}536$,	1 pont	
amiből $\alpha \approx 74{,}2°$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b) **első megoldás**		
Jelölje a trapéz alapjainak felezőpontját *F* és *G*. A trapéz *E* pontra illeszkedő *FG* magasságát behúzva az *EFB* és *ECG* derékszögű háromszögeket kapjuk, melyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak, hosszabbik befogójuk pedig 1,5 m, illetve 1,25 m hosszú. 	2 pont	
Ebből $EB = \frac{1{,}5}{\sin 60°} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ m, $DE = EC = \frac{1{,}25}{\sin 60°} \approx 1{,}44$ m.	1 pont	
A trapéz átlóinak hossza (1,73 + 1,44 =) 3,17 m.	1 pont	
Az *EFB* és *ECG* derékszögű háromszögekben (Pitagorasz-tétellel, vagy trigonometrikusan, vagy a fél szabályos háromszög oldalainak arányát felhasználva) $EF \approx 0{,}87$ m, $EG \approx 0{,}72$ m.	1 pont	
A trapéz magassága (0,87 + 0,72 =) 1,59 m,	1 pont	
területe pedig $\frac{3+2{,}5}{2} \cdot 1{,}59 \approx 4{,}37$ m^2.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) második megoldás		
A trapéz *CT* magasságát behúzva az *ATC* derékszögű háromszöget kapjuk, melynek átfogója a trapéz átlója, hegyesszögei 30 és 60 fokosak,	2 pont	
hosszabbik befogója pedig $3-\frac{3-2{,}5}{2}=2{,}75$ m.	1 pont	
A trapéz átlóinak hossza $\frac{2{,}75}{\sin 60°}\approx 3{,}18$ m.	1 pont	
A trapéz magassága (Pitagorasz-tétellel, vagy trigonometrikusan, vagy a fél szabályos háromszög oldalainak arányát felhasználva) 1,59 m,	2 pont	*A négyszög területe kiszámítható az átlók hossza és az átlók által közbezárt szög segítségével:* $\frac{3{,}18^2\cdot\sin 120°}{2}\approx 4{,}38\,\text{m}^2$.
területe pedig $\frac{3+2{,}5}{2}\cdot 1{,}59\approx 4{,}37\,\text{m}^2$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) harmadik megoldás		
Jelölje x az *EB* (és így az *EA*) szakasz hosszát. Az *ABE* egyenlőszárú háromszögben koszinusztétellel: $3^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\cos 120°$.	1 pont	
Rendezve: $3x^2=9$, amiből $x=\sqrt{3}$ (≈ 1,73) m.	1 pont	
A háromszög alaphoz tartozó magassága Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{(\sqrt{3})^2-1{,}5^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (≈ 0,87) m.	1 pont	
A *CDE* és az *EAB* háromszögek hasonlók (mert oldalaik párhuzamosak), a hasonlóság aránya $\frac{2{,}5}{3}=\frac{5}{6}$,	1 pont	
így $DE=\frac{5\sqrt{3}}{6}$ (≈ 1,44) m, a *CDE* háromszög magassága pedig $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ (≈ 0,72) m.	1 pont	
A trapéz átlói így $\sqrt{3}+\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{11\sqrt{3}}{6}$ (≈ 3,18) m hosszúak,	1 pont	
területe $\frac{3+2{,}5}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{121\sqrt{3}}{48}\approx 4{,}37\,\text{m}^2$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a)		
A csúcsos végükkel lefelé ejtett tojásoknak 8 mm ejtési magasság esetén az 55%-a (11 db), 9 mm esetén a 70%-a (14 db), 10 mm esetén pedig a 80%-a (16 db) repedt meg. Ez összesen 41 tojás.	2 pont	$\frac{55+70+80}{3} =$
$\frac{41}{60} \approx 0{,}683$, ezért ez a 60 tojásnak kb. 68,3%-a.	1 pont	$= 68{,}3\%$
Összesen:	**3 pont**	

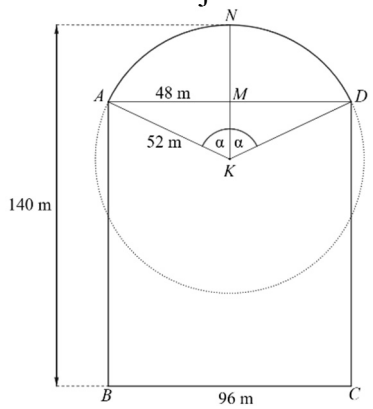
4. b)		
Az adatok minimuma 55,29 (kerekítve 55), maximuma 69,59 (70).	1 pont	
Az alsó kvartilis (a 15. és 16. adat átlaga) 59,26 (59).	1 pont	
A medián (a 30. és a 31. adat átlaga) 61,205 (61).	1 pont	
A felső kvartilis (a 45. és 46. adat átlaga) 64,14 (64).	1 pont	
Megfelelő diagram.  	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. c)		
(Komplementer módszerrel számolunk.) Annak a valószínűsége, hogy egy tojás nem reped meg, (1 – 0,3 =) 0,7.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy egyik leejtett tojás sem reped meg: $0{,}7^{10} \approx 0{,}028$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy pontosan egy tojás reped meg: $\binom{10}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^9 \approx 0{,}121$.	2 pont	
A keresett valószínűség $1 - 0{,}028 - 0{,}121 = 0{,}851$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: A $\sum_{i=2}^{10}\binom{10}{i} \cdot 0{,}3^i \cdot 0{,}7^{10-i}$ *összeg tagjai az alábbi táblázatban láthatók.*

i	$\binom{10}{i} \cdot 0{,}3^i \cdot 0{,}7^{10-i}$
2	$\approx 0{,}23347$
3	$\approx 0{,}26683$
4	$\approx 0{,}20012$
5	$\approx 0{,}10292$
6	$\approx 0{,}03676$
7	$\approx 0{,}00900$
8	$\approx 0{,}00145$
9	$\approx 0{,}00014$
10	$\approx 5{,}9 \cdot 10^{-6}$

II.

5. a)		
Az alábbi ábra jelöléseit használjuk.  $AM = 48$ m	1 pont	
Az AKM derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $KM^2 = 52^2 - 48^2$, azaz $KM = 20$ m.	1 pont	
$MN = 52 - 20 = 32$ m, így a téglalap másik oldala $140 - 32 = 108$ m,	1 pont	
a területe pedig $96 \cdot 108 = 10\,368$ m^2.	1 pont	
Jelölje α az AKM szöget. Ekkor $\sin\alpha = \frac{48}{52}$,	1 pont	
amiből $\alpha \approx 67{,}4°$.	1 pont	
Az AKD körcikk területe $52^2\pi \cdot \frac{2 \cdot 67{,}4°}{360°} \approx 3181$ m^2.	1 pont*	
A DAK háromszög területe $\frac{96 \cdot 20}{2} = 960$ m^2.	1 pont*	
A körszelet területe a körcikk és a háromszög területének a különbsége, azaz $(3181 - 960 =)$ 2221 m^2.	1 pont*	
A tér területe így $10\,368 + 2221 = 12\,589$ m^2.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetekért is megkaphatja a vizsgázó.*

A körcikk ívhossza: $i = \frac{2 \cdot 67{,}4°}{360°} \cdot 2 \cdot 52 \cdot \pi \approx 122{,}3$ m.	1 pont	*A 2α szöget kifejezzük radiánban:* $2\hat{\alpha} = \frac{134{,}8°}{360°} \cdot 2\pi \approx 2{,}353.$
A körszelet alapja $h = 96$ m, magassága $m = 32$ m.	1 pont	
A körszelet területe (felhasználva egy függvénytáblázatban található képletet): $\frac{1}{2} \cdot [ri - h(r-m)] = \frac{1}{2} \cdot [52 \cdot 122{,}3 - 96 \cdot (52-32)] \approx$ ≈ 2220 m^2.	1 pont	$\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (2\hat{\alpha} - \sin 2\alpha) \approx$ $\approx \frac{1}{2} \cdot 52^2 \cdot (2{,}353 - 0{,}710) \approx$ ≈ 2221 m^2

5. b)		
Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy korcsolyázni volt $\frac{11}{20}=0{,}55$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így annak a valószínűsége, hogy korcsolyázni volt, és diákjegyet vásárolt, $0{,}55\cdot 0{,}65\approx 0{,}358$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5. c)		
Jelölje $P(F)$ annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott személy a fürdőt választotta, $P(\bar{D})$ pedig annak a valószínűségét, hogy nem diákjegyet vett. Feltételes valószínűséget alkalmazva: $P(F \mid \bar{D})=\frac{P(F\cdot\bar{D})}{P(\bar{D})}$.	1 pont	
$P(F\cdot\bar{D})=0{,}45\cdot 0{,}6=0{,}27$	1 pont	
$P(\bar{D})=0{,}45\cdot 0{,}6+0{,}55\cdot 0{,}35=0{,}4625$	1 pont	
A keresett valószínűség tehát $\frac{0{,}27}{0{,}4625}\approx 0{,}584$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó egy általa megadott létszám felhasználásával adja meg az eredményt, de nem említi, hogy az eredmény független a létszámtól, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.
2. Az alábbi táblázat mutatja az egyes események valószínűségét egy véletlenszerűen kiválasztott látogató esetében.

	Diákjeggyel	**Nem diákjeggyel**	**Összesen**
Fürdő	$0{,}45\cdot 0{,}4=0{,}18$	$0{,}45\cdot 0{,}6=0{,}27$	0,45
Korcsolyapálya	$0{,}55\cdot 0{,}65=0{,}3575$	$0{,}55\cdot 0{,}35=0{,}1925$	0,55
Összesen	$0{,}18+0{,}3575=0{,}5375$	$0{,}27+0{,}1925=0{,}4625$	1

6. a)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Megfelelő ellenpélda.	1 pont	*Például* $\sqrt{1\cdot 4}=2$, *viszont* $\frac{1+4}{2}=2{,}5$.
Összesen:	**2 pont**	

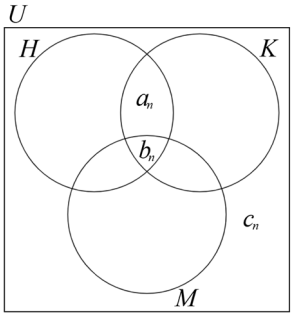
6. b)		
$c \cdot d = 392$, melynek prímtényezős felbontása $2^3 \cdot 7^2$.	1 pont	
Így a 392-nek $(3 + 1)(2 + 1) = 12$ pozitív osztója van.	1 pont	
Ezek 6 különböző, a feltételeknek megfelelő $(c; d)$ osztópárt alkotnak.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felsorolja a 392 *összes osztópárját, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár:* (1; 392), (2; 196), (4; 98), (7; 56), (8; 49), (14; 28).

6. c)		
Két szám mértani közepe akkor lesz egész szám, ha a két szám szorzata négyzetszám (aminek a prímtényezős felbontásában minden tényező kitevője páros).	1 pont	
$12 = 2^2 \cdot 3$ A keresett szám tehát $a^2 \cdot 3$ alakú (a pozitív egész szám), ahol $a^2 \cdot 3 < 100$.	2 pont	
Ebből $a^2 < 33{,}\dot{3}$.	1 pont	$a = 1, 2, 3, 4, 5$ *esetén a megfelelő számok rendre:* 3, 12, 27, 48, 75. *Tehát* 5 *ilyen szám van.*
5 olyan pozitív egész szám van, amelynek a négyzete kisebb, mint $33{,}\dot{3}$. Ezek 3-szorosa tesz eleget a feltételeknek, tehát összesen 5 megfelelő szám van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felsorolja az összes megfelelő számot, és ez alapján helyesen válaszol, de nem indokolja, hogy más megoldás nincs, akkor ezért 3 pontot kapjon.

6. d)		
Jelölje a két számot x, illetve y. Ekkor a számtani közepükből adódóan $x + y = 18$.	1 pont	
A két szám harmonikus közepére vonatkozó képlet alapján $\frac{2xy}{18} = 6{,}75$, amiből $x \cdot y = 60{,}75$.	1 pont	
Mivel $y = 18 - x$, így $x(18 - x) = 60{,}75$. Nullára rendezve: $0 = x^2 - 18x + 60{,}75$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei $x_1 = 13{,}5$ és $x_2 = 4{,}5$, amiből $y_1 = 4{,}5$ és $y_2 = 13{,}5$. Tehát a két szám a 4,5 és a 13,5.	2 pont	
Ellenőrzés: A két szám számtani közepe $\frac{4{,}5 + 13{,}5}{2} = 9$, harmonikus közepe pedig $\frac{2 \cdot 4{,}5 \cdot 13{,}5}{4{,}5 + 13{,}5} = 6{,}75$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a)		
	2-2 pont	*Ha egy sorozat elhelyezése a három szempont közül pontosan kettő szerint helyes, akkor 1 pont jár.*
Összesen:	**6 pont**	

7. b)		
Egy megfelelő sorozat megadása (korlátos, szigorúan monoton csökkenő, és a határértéke nem 0), pl. $d_n = 1 + \frac{1}{n}$.	2 pont	*Ha a megadott sorozatra a három tulajdonság közül pontosan kettő teljesül, akkor 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

7. c)		
$e_n = \frac{an+b}{cn+d} = \frac{n\left(a+\frac{b}{n}\right)}{n\left(c+\frac{d}{n}\right)} = \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{d}{n}}$, ahol a számláló határértéke a, a nevező határértéke pedig c, tehát ($c \neq 0$ miatt) a hányadossorozat határértéke $\frac{a}{c}$ valóban.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7. d)		
Az e_n sorozat határértéke $\frac{a}{c}$, ezért a kérdezett valószínűség csak a-tól és c-től függ.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az a és a c paraméter is 9-féle értéket vehet fel, ez összesen $9 \cdot 9 = 81$ lehetőség (összes eset).	1 pont	
Az $\frac{a}{c}$ akkor kisebb, mint 0,35, ha: $a = 1$ és $c = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; $a = 2$ és $c = 6, 7, 8, 9$; $a = 3$ és $c = 9$.	2 pont	
Ez összesen 12 eset (kedvező esetek száma).	1 pont	
Tehát a kérdezett valószínűség $\frac{12}{81} \approx 0{,}148$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a) első megoldás		
Jelölje a számtani sorozat első három tagját a_1, a_2, a_3, és a differenciáját d, ekkor $a_1 = a_2 - d$ és $a_3 = a_2 + d$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első három tag összege $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 39$, amiből $a_2 = 13$.	1 pont	
Ekkor a mértani sorozat három egymást követő tagja a szöveg alapján rendre $12 - d$, 12 és $14 + d$.	1 pont	
A mértani sorozat tulajdonsága alapján $(12-d)(14+d) = 12^2$,	1 pont	$\frac{14+d}{12} = \frac{12}{12-d}$
amiből $0 = d^2 + 2d - 24$.	1 pont	
$d_1 = 4$, amiből $a_1 = 9$, $a_2 = 13$ és $a_3 = 17$.	1 pont	
$d_2 = -6$, amiből $a_1 = 19$, $a_2 = 13$ és $a_3 = 7$.	1 pont	
Ellenőrzés: Az első esetben 8, 12 és 18, a másodikban pedig 18, 12 és 8 a kapott három szám, amelyek valóban egy-egy (1,5, illetve $\frac{2}{3}$ kvóciensű) mértani sorozat egymást követő tagjai.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. a) második megoldás		
Jelölje a számtani sorozat első három tagját a_1, a_2, a_3, és a differenciáját d, ekkor $a_1 = a_2 - d$ és $a_3 = a_2 + d$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első három tag összege $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 39$, amiből $a_2 = 13$.	1 pont	
A számtani sorozat harmadik tagja: $a_3 = 13 + d = 13 + 13 - a_1 = 26 - a_1$. A mértani sorozat tagjai ekkor $a_1 - 1$, 12 és $27 - a_1$.	1 pont	
A mértani sorozat tulajdonsága alapján $(a_1 - 1)(27 - a_1) = 12^2$,	1 pont	$\frac{27-a_1}{12} = \frac{12}{a_1-1}$
amiből $0 = a_1^2 - 28a_1 + 171$.	1 pont	
Ha $a_1 = 9$, akkor $a_2 = 13$ és $a_3 = 17$,	1 pont	
ha $a_1 = 19$, akkor pedig $a_2 = 13$ és $a_3 = 7$.	1 pont	
Ellenőrzés: Az első esetben 8, 12 és 18, a másodikban pedig 18, 12 és 8 a kapott három szám, amelyek valóban egy-egy (1,5, illetve $\frac{2}{3}$ kvóciensű) mértani sorozat egymást követő tagjai.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. a) harmadik megoldás		
Jelölje a számtani sorozat első három tagját a_1, a_2, a_3, és a differenciáját d, ekkor $a_1 = a_2 - d$ és $a_3 = a_2 + d$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első három tag összege $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 39$, amiből $a_2 = 13$.	1 pont	
A mértani sorozat második tagja így (13 – 1 =) 12. Jelölje a mértani sorozat hányadosát q, a sorozat három tagja ezzel $\frac{12}{q}$, 12 és $12q$. A számtani sorozat tagjai ekkor $\frac{12}{q}+1$, 13 és $12q-1$. A számtani sorozat tulajdonsága alapján $\frac{\left(\frac{12}{q}+1\right)+(12q-1)}{2}=13$.	2 pont*	
Nullára rendezve: $0 = 6q^2 - 13q + 6$.	1 pont	
Ha $q = \frac{3}{2}$, akkor a mértani sorozat tagjai 8, 12 és 18, a számtani sorozat tagjai pedig 9, 13, 17.	1 pont	
Ha $q = \frac{2}{3}$, akkor a mértani sorozat tagjai 18, 12 és 8, a számtani sorozat tagjai pedig 19, 13, 7.	1 pont	
Ellenőrzés: Az első esetben egy 4 differenciájú, a másodikban pedig −6 differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk, amelyek összege mindkét esetben 39 valóban.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A mértani sorozat második tagja így (13 – 1 =) 12. Jelölje a mértani sorozat hányadosát q, a sorozat három tagja ezzel $\frac{12}{q}$, 12 és $12q$. A három tag összege 1-gyel kisebb a számtani sorozat első három tagjának összegénél, tehát $\frac{12}{q}+12+12q=38$.	2 pont	

8. b)		
(Jelöljük a-val a szabályos háromszög oldalának hosszát (cm-ben). Jelölje továbbá a háromszög magasságát m, beírt körének sugarát r, köréírt körének sugarát R, területét pedig T.) $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$	1 pont	
$r = \frac{1}{3}m = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$	1 pont	
$R = \frac{2}{3}m = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$	1 pont	
$T = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	1 pont	
Mivel $R = 2r$ és $m = 3r$, ezért r, R és m egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek a differenciája r.	1 pont	
(Ha a számtani sorozatnak T az első tagja, akkor $T = r - r = 0$, tehát ilyen háromszög nem létezik.) Ha T a sorozat negyedik tagja, akkor $T = m + r = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$,	1 pont	
így felírható a $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$ másodfokú egyenlet.	1 pont	
Ezt osztva $\frac{\sqrt{3}}{4}a \neq 0$ -val a háromszög oldalára $a = \frac{8}{3}$ (cm) adódik.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

9. a)		
(A függvény $x = 0$ pontban felvett értékét keressük.) $f(0) = 3{,}5$	1 pont	
Tehát ($3{,}5 \cdot 10 =$) 35 méter magasan van a sánc teteje.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9. b)		
(A függvénygörbe alatti területet keressük.) $\int_0^6 (0{,}01x^3 - 0{,}8x + 3{,}5)\,dx =$	1 pont	
$= \left[\frac{0{,}01x^4}{4} - 0{,}4x^2 + 3{,}5x \right]_0^6 =$	1 pont	
$= \frac{0{,}01 \cdot 6^4}{4} - 0{,}4 \cdot 6^2 + 3{,}5 \cdot 6 - 0 =$	1 pont	
$= 9{,}84$	1 pont	
(A 1 : 10 arányú nagyítás miatt a valódi terület 100-szor ekkora, tehát) körülbelül 984 m^2 anyagra lesz szükség.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. c)		
A keresett érintőegyenes egy pontja a (6; $g(6)$) pont, ahol $g(6) = 0{,}86$.	1 pont	
(Az érintő meredekségét a g deriváltfüggvényének segítségével adhatjuk meg.) $g'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}8$	1 pont	
Az érintőegyenes meredeksége: $g'(6) = 0{,}03 \cdot 6^2 - 0{,}8 = 0{,}28.$	1 pont	
Az egyenes egyenlete $y = 0{,}28(x - 6) + 0{,}86.$	1 pont	$y = 0{,}28x - 0{,}82$
Összesen:	**4 pont**	

9. d) első megoldás		
A függvény a minimumát $x=-\frac{3}{2}$-ben veszi fel, így a deriváltja itt nulla.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A h deriváltfüggvénye $h'(x)=2ax+6$ ($x\in\mathbf{R}$).	1 pont	
$h'\left(-\frac{3}{2}\right)=-3a+6=0$, azaz $a=2$. ($h''\left(-\frac{3}{2}\right)=4>0$ miatt ez valóban minimumhely.)	1 pont	
A h függvénynek két zérushelye van, így a $2x^2+6x+c=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív: $36-8c>0$,	1 pont	
amiből $\frac{36}{8}>c$, tehát $c\in\{1;2;3;4\}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. d) második megoldás		
A függvény hozzárendelési szabálya átalakítva: $h(x)=a\left(x^2+\frac{6x}{a}+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{3}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{9}{a^2}\right]$.	2 pont	$h(x)=a\left(x+\frac{3}{a}\right)^2+\frac{ac-9}{a}$
Ennek szélsőértékhelye $x=-\frac{3}{a}=-1{,}5$, amiből $a=2$ ($a>0$, így valóban minimuma van a h-nak).	1 pont	
Mivel $a=2$, ezért $h(x)=2(x+1{,}5)^2+\frac{2c-9}{2}$. A h grafikonja „felfelé nyíló” parabola, ezért két zérushelye akkor van a függvénynek, ha $\frac{2c-9}{2}<0$.	1 pont	
Ebből $c<\frac{9}{2}$, tehát $c\in\{1;2;3;4\}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Forrásjegyzék:

3. feladat:
https://www.verga.hu/index.php/kilatok-kinizsi/ (utolsó letöltés: 2026. 03. 19.)
4. feladat:
https://www.nature.com/articles/s42005-025-02087-0 (utolsó letöltés: 2026. 03. 19.)
5. feladat:
Open AI: Képek – Hősök tere légifotó; 2026. április 7., https://chat.openai.com/chat
9. feladat:
Open AI: Képek – Freestyle síugrósánc; 2026. március 31., https://chat.openai.com/chat