

Exponenciális és logaritmikus feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámaára kattintva találod meg.

261 | 2026. május 2./a, b, c

A stroncium egy ezüstös fém, amelynek a természetben előforduló változata nem radioaktív. A stroncium leggyakoribb, mesterségesen előállított radioaktív változata a 90-es tömegszámú *stroncium-90* (^{90}Sr), amelyet például a gyógyászatban és az iparban használnak. A stroncium-90 felezési ideje körülbelül 29 év, tehát az m gramm tömegű stroncium-90 tömege (a radioaktív bomlás következtében) 29 év alatt $\frac{m}{2}$ grammra, t év alatt pedig $f(t) = m \cdot 0,5^{\frac{t}{29}}$ grammra csökken.

- a) Egy 1957-es nukleáris kísérlet során a becslések szerint 32 gramm stroncium-90 jutott a környezetbe. 2026-ban hány gramm található meg még ebből a környezetben?

[3 pont]

- b) Hány százalékkal csökken évente a bomlás következtében a stroncium-90 tömege?

[3 pont]

- c) Melyik évben kerülhetett 50 gramm stroncium-90 a környezetbe, ha 2026-ban 33,3 gramm maradt belőle?

[5 pont]

262 | 2026. május idegen nyelvi 1./a

Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$3x + 18 \cdot 3^y = 26$$

$$5x - 27 \cdot 3^y = 37$$

[7 pont]

251 | 2025. május 2./a, b, c

Egy kis szigeten élő állatfajok populációinak egyedszámát egy modell szerint (jó közelítéssel) a következő képlet adja meg: $P(t) = \frac{E}{1+k \cdot 2^{-ct}}$. A képletben $P(t)$ az adott faj populációjának egyedszáma a vizsgálat kezdetétől számított t év elteltével, E , k és c pedig az adott faj populációjára jellemző pozitív állandók: E a sziget eltartóképessége (a becsült maximális egyedszám, amit a sziget el tud tartani), k a populáció kezdeti méretétől, c pedig a populáció növekedési sebességétől függő állandó.

- a) Egy emlősfajra jellemző állandók értéke $k = 1,5$ és $c = 0,05$. Tudjuk, hogy a vizsgálat kezdetétől számított 8 év elteltével 140 egyedből áll a faj populációja. Határozza meg a szigetnek az erre az emlősfajra jellemző eltartóképességét!

[3 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

- b) Egy rágsálófaj esetén a sziget eltartóképessége 1500 egyed. Határozza meg az erre a populációra jellemző k és c állandók értékét, ha a vizsgálat kezdetekor 200, öt évvel később pedig 350 egyedből állt a populáció!

[7 pont]

- c) Igazolja, hogy egy populáció $P(t)$ egyedszáma a modell szerint soha nem haladhatja meg a sziget (adott populációra jellemző) eltartóképességét!

[4 pont]

252 | 2025. május idegen nyelvi 1./a

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$2^{x+3} - 2^x + 2^{x-1} = 60$$

[6 pont]

253 | 2025. október 1./a

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$9^{x+1} + 78 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0$$

[6 pont]

241 | 2024. május 1./a

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$3 + \log_2(x - 2) = \log_2(2x + 8)$$

[6 pont]

242 | 2024. május idegen nyelvi 1./a

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2^x} = 2^{x+1} - 1$$

[6 pont]

243 | 2024. október 2./a, b, c

Amikor egy csésze forró folyadékot beviszünk egy szobába, akkor a folyadék hőmérsékletének változását jó közelítéssel – Newton lehűlési törvénye szerint – a következő képlet írja le: $T(t) = H + (T(0) - H) \cdot 2^{ct}$.

A képletben $T(t)$ a folyadék hőmérséklete a vizsgálat kezdetétől számított t perc elteltével, H a szoba (állandónak tekinthető) hőmérséklete, $T(0)$ a folyadék kezdeti hőmérséklete ($T(0) > H$), c pedig a lehűlő folyadékot jellemző konstans. (A hőmérsékletet °C-ban mérjük.) Egy csésze 75 °C-os kávé beviszünk egy 25 °C hőmérsékletű szobába. A kávéra jellemző c érték $-0,209$.

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

- a) Számítsa ki, hogy negyedóra múlva milyen hőmérsékletű lesz a kávé!

[4 pont]

- b) A vizsgálat kezdetétől számítva mennyi idő múlva hűl le a kávé $25,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ hőmérsékletűre?

[4 pont]

Egy csésze $85\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os hőmérsékletű kávé beviszünk egy ismeretlen hőmérsékletű szobába. 10 perc alatt a kávé $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra hűl le.

- c) Határozza meg a szoba hőmérsékletét!

[4 pont]

231 | 2023. május 1./a

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_3 x + \log_3(x + 2) = 1$$

[7 pont]

232 | 2023. május idegen nyelvi 1./b, c

Az interneten található adatok alapján a napenergiát elektromos energiává alakító eszközök maximális összteljesítményének magyarországi alakulását az alábbi táblázat szemlélteti (megawattban mérve).

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
összteljesítmény (MW)	12	35	77	168	225	300	640	1277

A maximális összteljesítmény alakulását exponenciális növekedésűnek feltételezve egy táblázatkezelő program az első táblázatban megadott adatok alapján a $c(x) = 17,84 \cdot 1,848^x$ közelítő összefüggést adja, ahol x a 2012 óta eltelt évek száma (x természetes szám), $c(x)$ pedig MW-ban adja meg a maximális összteljesítményt a modell szerint.

- b) Hány százalékkal tér el a 2018. évi 640 MW-os adattól a modell alapján kiszámítható 2018-as érték?

[3 pont]

- c) Oldja meg a valós számok halmazán a $17,84 \cdot 1,848^x = 40\,000$ egyenletet!

[4 pont]

233 | 2023. október 1./b

Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$3 \cdot 9^x - 3^{x+3} = 3^x - 9$$

[7 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

234 | 2023. október 7./a, b

Egy bizonyos fenyőfa (méterben mért) várható magasságának becslésére az alábbi képletet használják:

$$h(t) = \frac{30}{1+59 \cdot 0,905^t}, \text{ ahol } t \text{ a megfigyelés kezdetétől eltelt idő években számítva.}$$

a) Hány méter magas volt a fa a megfigyelés kezdetekor?

[2 pont]

b) A megfigyelés kezdetétől számítva hány év múlva lesz a fa 10 méter magas?

[5 pont]

221 | 2022. május 1./a

Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$9^{x+1} + 15 \cdot 3^x = 6$$

[6 pont]

222 | 2022. október 2./b

Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_3(x+8) + \log_3(x-2) - \log_3(x+4) = 1$$

[8 pont]

211 | 2021. május 1./b

Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$2 \log_4 x^2 + 3 \log_4 x^3 = \log_4 x^4 + \log_4 8^9$$

[6 pont]

212 | 2021. október 1./a

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$(2^x - 3)^2 = 2^{x+1} + 9$$

[7 pont]

201 | 2020. május idegen nyelvi 2./b

Hány olyan egész szám van, amelyik megoldása az alábbi egyenlőtlenségnek?

$$\log_2(x^2 - 200) < 20$$

[6 pont]

202 | 2020. október 6./a, b

Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

$$B(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L}{B_0} - 1\right) \cdot 0,75^t}$$

formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve ($0 \leq t < 30$), L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban ($0 < B_0 < L$). Egy nagyvárosban $L = 1,5$ millió, $B_0 = 1000$.

- a)** A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal?

[3 pont]

- b)** Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint?

[6 pont]

Megoldások

261

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
1957-től 2026-ig 69 év telt el.	1 pont
Az 1957-ben a környezetbe jutott stroncium-90-ből $f(69) = 32 \cdot 0,5^{\frac{69}{29}} \approx$	1 pont
$\approx 6,15$ (gramm) található meg még a környezetben 2026-ban.	1 pont
b)	
(Az exponenciális csökkenés miatt elegendő a változást az első évben megvizsgálni.) $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{m \cdot 0,5^{\frac{1}{29}}}{m} = 0,5^{\frac{1}{29}} \approx$	1 pont
$\approx 0,976$	1 pont
Tehát $(100 - 97,6 =)$ 2,4%-kal csökken évente a stroncium-90 tömege.	1 pont
c)	
Jelölje t a stroncium-90 környezetbe kerülésétől a 2026-ig eltelt évek számát. Ekkor $33,3 = 50 \cdot 0,5^{\frac{t}{29}}$.	1 pont
$0,666 = 0,5^{\frac{t}{29}}$	1 pont
$\frac{t}{29} = \log_{0,5} 0,666$	1 pont
$t = 29 \cdot \log_{0,5} 0,666 \approx 17$	1 pont
Tehát $(2026 - 17 =)$ 2009-ben kerülhetett az 50 gramm stroncium-90 a környezetbe.	1 pont

262

[Vissza a feladathoz.](#)

Az első egyenletet 3-mal, a másodikat 2-vel szorozva: $9x + 54 \cdot 3^y = 78$ $10x - 54 \cdot 3y = 74$	1 pont
--	--------

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

A két egyenletet összeadva: $19x = 152,$	1 pont
amiből $x = 8.$	1 pont
Az első egyenletbe visszahelyettesítve: $3 \cdot 8 + 18 \cdot 3^y = 26,$	1 pont
amiből $3^y = \frac{1}{9}.$	1 pont
(Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $y = -2.$	1 pont
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont

251

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
Behelyettesítve a megadott értékeket: $P(8) = \frac{E}{1 + 1,5 \cdot 2^{-0,05 \cdot 8}} = 140$	1 pont
ahonnan $E = 140 \cdot (1 + 1,5 \cdot 2^{-0,4}) \approx 299$, tehát a sziget eltartóképessége ebből a fajból kb. 300 egyed.	2 pont
b)	
$P(0) = \frac{1500}{1 + k \cdot 2^{-c \cdot 0}} = \frac{1500}{1 + k} = 200$	1 pont
ahonnan $1 + k = 7,5$, tehát $k = 6,5$.	1 pont
$P(5) = \frac{1500}{1 + 6,5 \cdot 2^{-5c}} = 350$	1 pont
ahonnan $1 + 6,5 \cdot 2^{-5c} = \frac{1500}{350} = \frac{30}{7},$	1 pont
tehát $2^{-5c} = \frac{\frac{30}{7} - 1}{6,5} \approx 0,5055.$	1 pont
$-5c = \log_2 0,5055 \approx -0,9842,$	1 pont
ahonnan $c \approx 0,197.$	1 pont
c)	

Mivel $P(t) = \frac{E}{1+k \cdot 2^{-ct}}$, így bizonyítandó, hogy nemnegatív t esetén $\frac{E}{1+k \cdot 2^{-ct}} \leq E$.	1 pont
A tört nevezője pozitív, mert a 2-nek tetszőleges valós kitevős hatványa, valamint k is pozitív.	1 pont
A (pozitív) E -vel osztva, a tört (pozitív) nevezőjével szorozva: $1 \leq 1 + k \cdot 2^{-ct}$.	1 pont
$0 \leq k \cdot 2^{-ct}$, ami valóban teljesül. Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk (átalakításaink ekvivalensek voltak).	1 pont

252

[Vissza a feladathoz.](#)

$8 \cdot 2^x - 2^x + \frac{2^x}{2} = 60$	1 pont
Mindkét oldalt megszorozva 2-vel: $16 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 2^x = 120$.	1 pont
Rendezve: $15 \cdot 2^x = 120$.	1 pont
$2^x = 8 (= 2^3)$	1 pont
(Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, így) $x = 3$.	1 pont
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont

253

[Vissza a feladathoz.](#)

$78 \cdot 3^{x-1} = 26 \cdot 3^x$, ezért az egyenlet így is felírható: $9 \cdot 9^x + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$.	1 pont
Mivel $9^x = (3^x)^2$, ezért az egyenlet 3^x -ben másodfokú,	1 pont
amelynek megoldásai a -3 és az $\frac{1}{9}$.	1 pont
A $3^x = -3$ egyenletnek nincs megoldása.	1 pont
A $3^x = \frac{1}{9}$ egyenlet megoldása $x = -2$.	1 pont
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont

241

[Vissza a feladathoz.](#)

(A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt $x > -4$ és) $x > 2$.	1 pont
$3 = \log_2 8$	1 pont
(A logaritmusok összegére vonatkozó azonosságot felhasználva) $\log_2(8x - 16) = \log_2(2x + 8)$.	1 pont
(A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $8x - 16 = 2x + 8$.	1 pont
$x = 4$	1 pont
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy (az értelmezési tartományon) ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont

242

[Vissza a feladathoz.](#)

(Mivel 2^x mindig pozitív, ezért az egyenlet minden valós számra értelmezve van.) Négyzetre emelve: $2^x = 2^{x+2} - 2 \cdot 2^{x+1} + 1$	1 pont
Nullára rendezve: $0 = 4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1$	1 pont
Az egyenlet 2^x -ben másodfokú, megoldva: $2^x = 1$ vagy $2^x = \frac{1}{4}$	1 pont
Az első esetben $x = 0$, a második esetben $x = -2$.	2 pont
Behelyettesítéssel adódik, hogy $x = 0$ valóban megoldás, $x = -2$ viszont nem.	1 pont

243

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
$T(0) = 75^\circ\text{C}, H = 25^\circ\text{C}, t = 15 \text{ perc}, c = -0,209$	1 pont
$T(15) = 25 + (75 - 25) \cdot 2^{-0,209 \cdot 15} =$	1 pont
$= 25 + 50 \cdot 2^{-3,135} \approx$	1 pont
$\approx 30,7^\circ\text{C}$ hőmérsékletű lesz a kávé negyedóra múlva.	1 pont
b)	
$25,5 = 25 + 50 \cdot 2^{-0,209 \cdot t}$	1 pont
$0,01 = 2^{-0,209 \cdot t}$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

$-0,209t = \log_2 0,01 \approx -6,644$	1 pont
$t \approx 31,8$, tehát kb. 32 perc múlva hűl le a kávé $25,5\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletűre.	1 pont
c)	
$40 = H + (85 - H) \cdot 2^{-0,209 \cdot 10}$	1 pont
$40 = H + (85 - H) \cdot 0,235$	1 pont
$40 = 0,765H + 19,975$	1 pont
Ebből a szoba hőmérséklete $H \approx 26,2\text{ }^\circ\text{C}$.	1 pont

231

[Vissza a feladathoz.](#)

Értelmezési tartomány: $\mathbf{R^+}$.	1 pont
(A logaritmus azonossága alapján) $\log_3 x(x + 2) = 1$	1 pont
(A logaritmus definíciója miatt) $x(x + 2) = 3$.	1 pont
$x^2 + 2x - 3 = 0$	1 pont
$x = -3$ vagy $x = 1$.	1 pont
A -3 nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért nem megoldás.	2 pont
Az 1 eleme az értelmezési tartománynak, és (az értelmezési tartományon) ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát az 1 megoldás.	1 pont

232

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
A modell alapján számított érték: $c(6) = 17,84 \cdot 1,848^6 \approx 711\text{ MW}$.	1 pont
$\frac{711}{640} \approx 1,11$	1 pont
tehát ez az érték kb. 11%-kal tér el a valódi adattól.	1 pont
c)	
$1,848^x = \frac{40\,000}{17,84} (\approx 2242,2)$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

(A lg-függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $x \cdot \lg 1,848 \approx \lg 2242,2$ $x \approx \frac{\lg 2242,2}{\lg 1,848}$	2 pont
$x \approx 12,56$	1 pont

233

[Vissza a feladathoz.](#)

$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$	2 pont
Az $a = 3^x$ új ismeretlen bevezetésével: $3a^2 - 28a + 9 = 0 \ (a > 0)$	1 pont
$a = 9$ vagy $a = \frac{1}{3}$	1 pont
Az első esetben $x = 2$,	1 pont
a második esetben $x = -1$.	1 pont
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont

234

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
$h(0) = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0,905^0} =$	1 pont
$= 0,5$ m magas volt a fenyőfa.	1 pont
b)	
$10 = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0,905^t}$	1 pont
$590 \cdot 0,905^t = 20$ $0,905^t = \frac{2}{59}$	1 pont
$t = \log_{0,905} \frac{2}{59}$	1 pont
$t \approx 33,9$	1 pont

A megfigyelés kezdetétől számítva körülbelül 34 év múlva lesz a fa magassága 10 m.	1 pont
--	--------

221

[Vissza a feladathoz.](#)

$9 \cdot 9^x + 15 \cdot 3^x - 6 = 0$	1 pont
Mivel $9^x = (3^x)^2$, ezért az egyenlet 3^x -ben másodfokú: $9 \cdot (3^x)^2 + 15 \cdot 3^x - 6 = 0$.	1 pont
$3^x = -2$ vagy $3^x = \frac{1}{3}$.	1 pont
Az első eset nem lehetséges (mert $3^x > 0$),	1 pont
a második esetből pedig $x = -1$ adódik.	1 pont
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont

222

[Vissza a feladathoz.](#)

Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 2$. (Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.)	1 pont
(A logaritmus definíciója és azonosságai alapján) $\log_3 \frac{(x+8)(x-2)}{x+4} = \log_3 3$	2 pont
(A logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $\frac{(x+8)(x-2)}{x+4} = 3$	1 pont
Nullára rendezve $x^2 + 3x - 28 = 0$	1 pont
Ennek a gyökei a 4 és a -7 ,	1 pont
melyek közül csak a 4 megoldás (mert $-7 \leq 2$).	1 pont
Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az értelmezési tartományon ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont

211

[Vissza a feladathoz.](#)

Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$. (Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.)	1 pont
--	--------

A logaritmus azonosságait alkalmazva: $4\log_4 x + 9\log_4 x = 4\log_4 x + 9\log_4 8$.	2 pont
$9\log_4 x = 9\log_4 8$, azaz $\log_4 x = \log_4 8$ amiből a logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelmősége miatt $x = 8$.	2 pont
Ellenőrzés: behelyettesítéssel vagy (az $x > 0$ halmazon) ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont

212

[Vissza a feladathoz.](#)

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 9 = 2 \cdot 2^x + 9$	2 pont
Ez az egyenlet 2^x -ben másodfokú. Nullára rendezve: $(2^x)^2 - 8 \cdot 2^x = 0$	1 pont
$2^x = 0$ vagy $2^x = 8$	1 pont
(2^x mindig pozitív, ezért) az első eset nem lehetséges,	1 pont
a másodikból (az exponenciális függvény kölcsönös egyértelmősége miatt) $x = 3$.	1 pont
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont

201

[Vissza a feladathoz.](#)

Értelmezési tartomány: $x^2 - 200 > 0$ (azaz $x^2 > 200$).	1 pont
A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért az eredeti egyenlőtlenségből $x^2 - 200 < 2^{20}$, azaz $x^2 < 2^{20} + 200$ következik,	1 pont
tehát $200 < x^2 < 2^{20} + 200$, azaz $\sqrt{200} < x < \sqrt{2^{20} + 200} (\approx 1024,1)$	1 pont
(Mivel x egész szám, ezért) $15 \leq x \leq 1024$.	1 pont
$ x $ lehetséges értékeinek száma $1024 - 14 (= 1010)$.	1 pont
Mivel x negatív egész szám is lehet, az egyenlőtlenség megoldásainak száma $2 \cdot (1024 - 14) = 2020$.	1 pont

a)	
(A $t = 5$ helyettesítést alkalmazzuk.) $B(5) = \frac{1,5 \cdot 10^6}{1 + \left(\frac{1,5 \cdot 10^6}{1000} - 1\right) \cdot 0,75^5} \approx$	1 pont
$\approx 4204,98,$	1 pont
azaz kb. 4200 betegre lehet számítani.	1 pont
b)	
A lakosság 10%-a 150 ezer fő.	1 pont
Jelölje t a kért napok számát. $\frac{1,5 \cdot 10^6}{1 + \left(\frac{1,5 \cdot 10^6}{1000} - 1\right) \cdot 0,75^t} = 1,5 \cdot 10^5$	1 pont
$10 = 1 + 1499 \cdot 0,75^t$ $\frac{9}{1499} = 0,75^t$	1 pont
$t = \log_{0,75} \frac{9}{1499} \approx$	1 pont
$\approx 17,78.$	1 pont
Azaz kb. 18 nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött ($18 < 30$).	1 pont