

Gráfos feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámaára kattintva találod meg.

261 | 2026. május idegen nyelvi 6./a, b

A G halmaz a kilencpontú, összefüggő, egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a G elemeire vonatkozik: Ha egy (kilencpontú, összefüggő, egyszerű) gráfban minden pont fokszáma legalább 2, akkor a gráfban van kör.

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

[3 pont]

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a G elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

[3 pont]

262 | 2026. május idegen nyelvi 8./a

Egy n pontú fagráfnak és egy $4n$ pontú fagráfnak együttesen 10-zel több éle van, mint az n pontú teljes gráfnak.

Határozza meg n értékét!

[6 pont]

263 | 2026. május idegen nyelvi 8./b

Legyen G egy tetszőleges 10 pontú egyszerű gráf.

Igazolja, hogy G -nek vagy $\bar{G}$ -nek (G komplementer gráfjának) legalább 23 éle van!

[3 pont]

251 | 2025. május 8./a

Legyen G egy ötpontú fagráf.

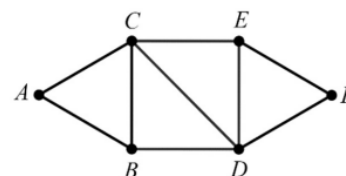
Lehetséges-e, hogy ekkor G komplementere is fagráf?

[4 pont]

252 | 2025. október 3./a

Tekintsük az ábrán látható 6 pontú, 9 élű gráfot!

Hányféle úton juthatunk el az A pontból az F pontba, ha egy-egy út során minden élen és minden csúcson legfeljebb egyszer haladhatunk át?



[5 pont]

241 | 2024. május 9./a

Egy k és egy $2k$ pontú teljes gráfnak összesen 697 éle van.

Határozza meg k értékét!

[5 pont]

242 | 2024. május 9./c

Egy mérkőzés előtt az öltözőben hatan vannak, akik közül néhányan már kezet fogtak egymással. Mind a hat embertől megkérdeztük, hogy eddig hány másik emberrel fogott kezet. A válaszok között van öt különböző érték.

Hány kézfogás történnhetett eddig összesen?

[6 pont]

231 | 2023. május idegen nyelvi 6./c

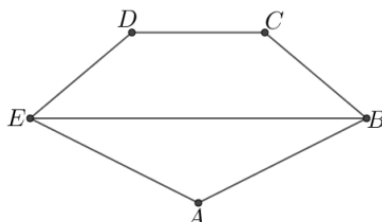
Egy 8 pontú egyszerű gráfnak 13 éle van, és az egyik pontjának a fokszáma 6. Igazolja, hogy van hárompontú kör (gráfelméleti háromszög) a gráfban!

[4 pont]

232 | 2023. október 5./c

Hányféleképpen járható be az ábrán látható $ABCDE$ ötpontú gráf, ha mindegyik élén pontosan egyszer kell végighaladnunk?

(A bejárás kezdőpontja a gráf egyik csúcsa; egy csúcsba érkezve csak olyan élen haladhatunk tovább, amely szintén az adott csúcsból indul.)



[4 pont]

233 | 2023. október 6./c

Egy hatfős baráti társaság, Attila, Boróka, Csaba, Dóra, Emil és Fanni három csapatot alkot. Mindhárom csapat 2 tagú, és mind a hatan pontosan egy csapatnak lesznek a tagjai.

Végül Attila Borókával, Csaba Dórával, Emil pedig Fannival került egy csapatba. A három csapat tagjai egyéni asztalitenisz-mérkőzéseket játszanak. Mindhárom csapat mindkét tagja egyszer játszik a másik két csapat mindkét tagjával. (Az egy csapatba tartozók nem játszanak egymás ellen.) Az egyes mérkőzéseket egymás után bonyolítják le. Az egyik mérkőzés után Attila megfigyelte, hogy a többi öt játékos mind különböző számú mérkőzést játszott eddig.

Hány mérkőzést játszott eddig Boróka?

[7 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

221 | 2022. május 8./b

Egy hatfős baráti társaság tagjai András, Bori, Csaba, Dóra, Ervin és Fanni bajnokságon döntenek el, hogy ki a legjobb pingpongos közülük. Mindenki mindenki ellen egy mérkőzést játszik. Amikor 9 mérkőzést már lejátszottak, akkor kiderült, hogy mindegyikük páratlan számú mérkőzésen van túl. András az eddigi egyetlen meccsét Bori ellen játszotta, Csaba még nem játszott Ervin ellen.

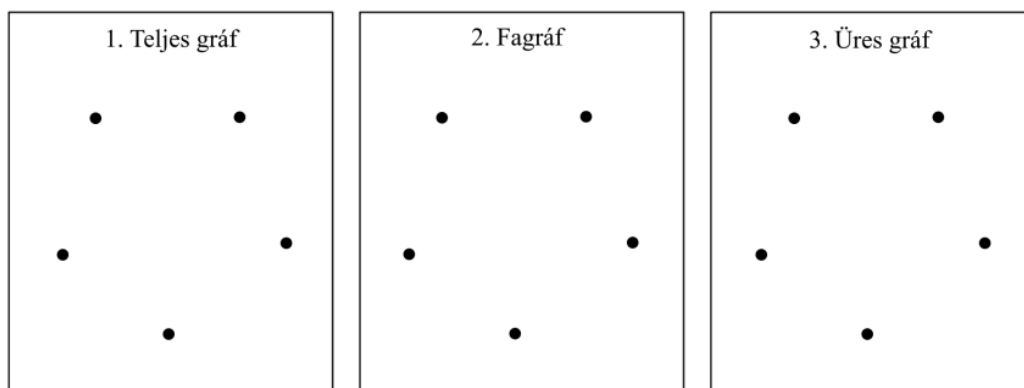
Játszott-e már Dóra Fanni ellen?

[7 pont]

222 | 2022. május idegen nyelvi 7./c

Egy papírlapon adott öt pont. A pontok mellé egy-egy pozitív egész számot írunk. Az adott pontok legyenek egy olyan ötpontú egyszerű gráf csúcsai, amelynek két csúcsa pontosan akkor van éllel összekötve, ha a csúcsok mellé írt számok közül az egyik többszöröse a másiknak.

Az alábbi három ábra mindegyikén 5-5 pont látható. Írjon mindhárom ábrán az 5 pont mellé **különböző** pozitív egész számokat, majd rajzolja meg a fenti szabály szerint a gráf éleit úgy, hogy az első esetben egy teljes gráfot, a második esetben egy fagráfot, a harmadik esetben pedig egy üres gráfot kapjon (az üres gráfnak egyetlen éle sincsen)!



[6 pont]

223 | 2022. október 7./b

Egy ötpontú egyszerű gráf A, B, C, D, E pontjaihoz rendre a 3^{-2} , 3^{-7} , 3^{-12} , $1 - \sqrt{2}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ számokat írtuk. A gráfban két pont akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha a két ponthoz írt számok **összege** racionális szám.

Hány éle van ennek az ötpontú gráfnak?

[5 pont]

211 | 2021. május 6./a, b

Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az A, B, C, D, E, F hattagú társaság mely tagjai ismerik egymást, azaz milyen a társaság *ismeretségi hálója* (ismeretségi gráfja).

(Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálója akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.)

A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy A-nak 5, B-nek 4, C-nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán D, E és F egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ.

a) Hányféle lehet a D, E, F csoport ismeretségi hálója?

[3 pont]

A friss bizonyítékok szerint a D, E, F csoportban mindenki ismeri a másik két személyt.

b) Az összes eddigi (a korábban és a frissen szerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az A, B, C, D, E, F hattagú társaság ismeretségi hálója?

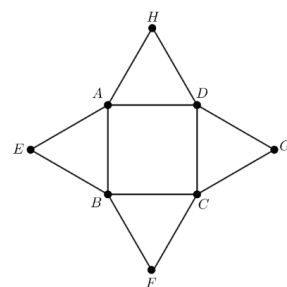
[9 pont]

201 | 2020. május 3./c

Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.

A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezésnél lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!

[3 pont]

**202 | 2020. május idegen nyelvi 6./b**

Legyen G egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen 6 éle van.

Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? Válaszát indokolja!

[3 pont]

203 | 2020. május idegen nyelvi 6./c

Egy n pontú teljes gráf egyik élét pirosra színeztük ($n \geq 3$). Ezután a többi él közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott élnek és a pirosra színezett élnek van közös csúcsa, a B esemény pedig az, hogy nincs közös csúcsuk.

Ha az A és a B esemény egyenlő valószínűségű, akkor hány pontja van a gráfnak?

[9 pont]

204 | 2020. október 5./b, c

Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = (x + 4)(2 - x)$$

$$g(x) = x + 4$$

$$h(x) = x^2 - 4$$

$$i(x) = |x| - 4$$

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

b) Rajzolja fel az így kapott gráfot!

[4 pont]

A valós számok halmazán értelmezett k függvény zérushelyei -5 és 3 , az m függvény zérushelyei 3 és -3 , az n függvény zérushelyei pedig 5 és -5 . A p elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol c egy valós szám.

c) Hányféleképpen választható meg a c konstans értéke úgy, hogy a k , m , n és p függvényekre a **b)** feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen?

[5 pont]

Megoldások

261

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
Az állítás igaz.	1 pont
Ha minden pont fokszáma legalább 2, akkor a gráf fokszámösszege legalább 18, tehát legalább 9 éle van.	1 pont
Ez több, mint a kilencpontú fagraf éleinek száma (8), így biztosan van benne kör.	1 pont
b)	
Az állítás megfordítása: Ha egy (kilencpontú, összefüggő, egyszerű) gráfban van kör, akkor minden pontjának fokszáma legalább 2.	1 pont
Az állítás hamis.	1 pont
Jó ellenpélda.	1 pont

262

[Vissza a feladathoz.](#)

Az n pontú fának $n - 1$, a $4n$ pontú fának $4n - 1$,	1 pont
az n pontú teljes gráfnak $\frac{n(n-1)}{2}$ éle van.	1 pont
A megoldandó egyenlet: $n - 1 + 4n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 10$.	1 pont
2-vel szorozva és rendezve: $n^2 - 11n + 24 = 0$.	1 pont
Innen $n = 3$ vagy $n = 8$.	1 pont
Ellenőrzés: (A 3 pontú fának 2, a 12 pontúnak 11, a 3 pontú teljes gráfnak 3 éle van, és) $2 + 11 = 3 + 10$ valóban. (A 8 pontú fának 7, a 32 pontúnak 31, a 8 pontú teljes gráfnak 28 éle van, és) $7 + 31 = 28 + 10$ valóban.	1 pont

263

[Vissza a feladathoz.](#)

G és $\bar{G}$ együttesen egy 10 pontú teljes gráfot alkot,	1 pont
---	--------

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

melynek $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ éle van.	1 pont
Ezért az egyiknek legalább 23 éle van, különben összesen legfeljebb 44 élük lenne.	1 pont

251

[Vissza a feladathoz.](#)

Nem lehetséges.	1 pont
G egy ötpontú fagráf, így 4 éle van.	1 pont
Az ötpontú teljes gráfnak $\binom{5}{2} = 10$ éle van.	1 pont
G komplementerének így $(10 - 4 =)$ 6 éle van, ezért nem lehet fagráf (mert annak csak 4 éle van).	1 pont

252

[Vissza a feladathoz.](#)

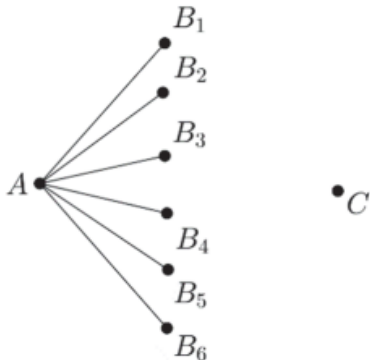
Felsoroljuk a megfelelő utakat (például az utak hossza alapján). 3 hosszú utak: ABDF, ACDF, ACEF (3 lehetőség). 4 hosszú utak: ABCDF, ABCEF, ABDEF, ACBDF, ACDEF, ACEDF (6 lehetőség). 5 hosszú utak: ABCDEF, ABCEDF, ABDCEF, ACBDEF (4 lehetőség).	4 pont
Összesen $(3 + 6 + 4 =)$ 13 megfelelő út van.	1 pont

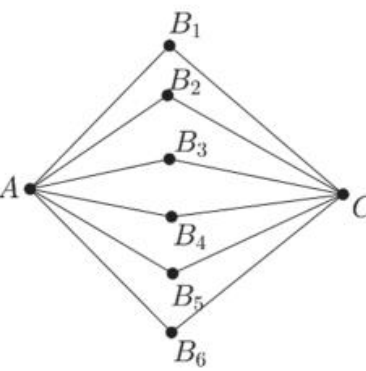
241

[Vissza a feladathoz.](#)

A k pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{k(k-1)}{2}$. A $2k$ pontú gráf éleinek száma $\frac{2k(2k-1)}{2}$.	1 pont
$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{2k(2k-1)}{2} = 697$	1 pont
$5k^2 - 3k - 1394 = 0$	1 pont
$k = -16,4$ nem megoldás.	1 pont
$k = 17$ megoldás (és ez megfelel a feladat feltételeinek).	1 pont

(Tekinthejtük a hat embert egy hatpontú gráf pontjainak, a kézfogásokat pedig a gráf éleinek.) (Egy 6 pontú egyszerű gráfban nem lehet egyszerre 0 és 5 fokszámú pont, ezért) a gráfban az öt különböző fokszám 0; 1; 2; 3; 4, vagy 1; 2; 3; 4; 5 lehet csak.	2 pont
(Ha a gráf öt pontjának fokszáma 0; 1; 2; 3; 4, akkor a 4 fokszámú pontot a 0 fokszámún kívül mindegyik ponttal össze kell kötni. A 3 fokszámú pontot pedig a 0 és az 1 fokszámún kívül mindegyik ponttal össze kell kötni.) Ekkor a hatodik pont fokszáma csak 2 lehet,	1 pont
tehát az élek (azaz a kézfogások) száma lehet $\left(\frac{0 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4}{2} \right) = 6$	1 pont
(Ha a gráf öt pontjának fokszáma 1; 2; 3; 4; 5, akkor az 5 fokszámú pontot mindegyik ponttal össze kell kötni. A 4 fokszámú pontot az 1 fokszámún kívül mindegyik ponttal össze kell kötni. A 3 fokszámú pontot pedig az 1 és a 2 fokszámún kívül mindegyik ponttal össze kell kötni.) Ekkor a hatodik pont fokszáma csak 3 lehet,	1 pont
tehát az élek (azaz a kézfogások) száma lehet $\left(\frac{1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5}{2} \right) = 9$	1 pont

	Jelölje a hatodfokú pontot A, a belőle kiinduló hat él végpontját $B_1, B_2, \dots, B_6$, a gráf nyolcadik csúcsát C. Húzzuk be az A-ból kiinduló 6 élt.	1 pont
---	--	--------

	(Mivel CA már nem húzható be,) a gráf maradék 7 éle a $\{C, B_1, B_2, \dots, B_6\}$ részgráfban van. C-ből legfeljebb 6 él húzható (ezt mutatja az ábra), ezért a $\{B_1, B_2, \dots, B_6\}$ részgráfban is van éle a gráfnak, például a B_1B_2.	2 pont
Ekkor AB_1B_2 egy (gráfelméleti) háromszög, az állítást tehát beláttuk.		1 pont

232

[Vissza a feladathoz.](#)

A másodfokú A, C vagy D csúcsból indulva a bejárás feltételei nem teljesíthetők (ha a másodfokú csúcs a kiindulási pont, akkor ez az érkezési pont is egyben, ami csak 3, 4 vagy 5 él bejárását teszi lehetővé).	1 pont
Ha (például) a B pontból indulunk, akkor 3 lehetőségünk van az E pontba érkezni, onnan pedig mindegyik esetben 2 lehetőségünk van visszaérkezni B-n keresztül az E-be.	1 pont
A B-ből indulva tehát $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség van a gráf éleinek bejárására.	1 pont
Az E-ből indulva ugyanennyi, összesen tehát 12 bejárási lehetőség van.	1 pont

233

[Vissza a feladathoz.](#)

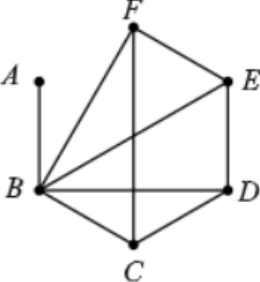
(A neveket a kezdőbetűikkel helyettesítjük.) Mivel a csapattársa ellen senki sem játszhatott, ezért B, C, D, E és F csak 0, 1, 2, 3 vagy 4 mérkőzést játszhatott, emiatt mindegyik eset pontosan egyszer elő is fordult.	1 pont
B nem játszhatott 4 mérkőzést, mert akkor nem lenne 0 a C, D, E és F mérkőzéseinek száma között.	1 pont
Feltehetjük, hogy C játszott 4 mérkőzést. Ekkor csak C csapattársa (D) mérkőzéseinek száma lehet 0.	1 pont
A $B-E, B-F, A-E, A-F$ mérkőzések közül azokat kell kiválasztani, amelyekkel teljesül az a feltétel, hogy B, E, F mérkőzéseinek száma valamilyen sorrendben 1, 2, 3.	1 pont
Ha B-nek 3 mérkőzése lenne, akkor nem lenne olyan játékos, akinek 1 mérkőzése van,	1 pont
s ha B-nek 1 mérkőzése lenne, akkor nem lenne olyan játékos, akinek 3 mérkőzése van.	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Ezek alapján Boróka csak 2 mérkőzést játszhatott (és ez lehetséges is).	1 pont
---	--------

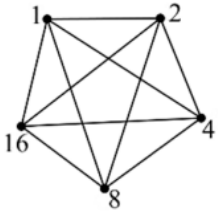
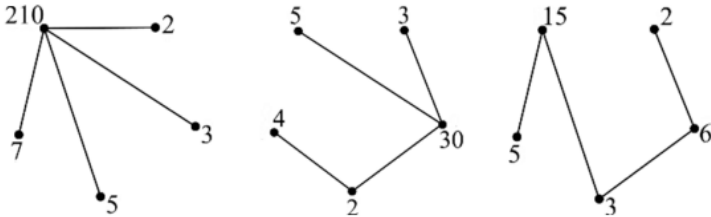
221

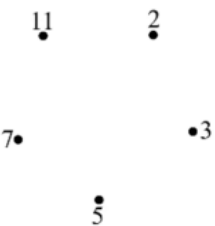
[Vissza a feladathoz.](#)

Ha a lejátszott 9 mérkőzést a hatpontú ABCDEF egyszerű gráffal szemléltetjük, akkor a gráfban a csúcsok fokszámának összege $(2 \cdot 9 =) 18$.	1 pont
A feladat szövege szerint B, C, D, E, F fokszáma 1, 3 vagy 5 lehet, és az öt fokszám összege 17 (mert A fokszáma 1).	1 pont
Legalább egy 5 fokszámú csúcsnak lennie kell közöttük (ha nem lenne, akkor a fokszámok összege legfeljebb $5 \cdot 3 = 15$ lenne).	1 pont
Csak a B csúcsnak lehet 5 a fokszáma, mert csak B játszott A-val.	1 pont
Ezekkel a feltételekkel a C, D, E, F csúcsok fokszáma csak 3 lehet (mert a négy csúcs fokszámának összege 12).	1 pont
Mivel C és E között nincs él, ezért a CB, CD, CF élek és az EB, ED, EF élek is léteznek.	1 pont
 Így a D-ből induló 3 él DB, DC és DE. A DF él tehát nem létezik: Dóra nem játszott még Fanni ellen.	1 pont

222

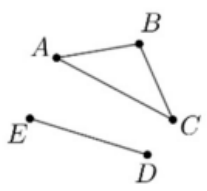
[Vissza a feladathoz.](#)

Egy megfelelően számozott teljes gráf, például: 	2 pont
Egy megfelelően számozott fagráf, például az alábbiak egyike: 	2 pont

Egy megfelelően számozott üres gráf, például:	
	2 pont

223

[Vissza a feladathoz.](#)

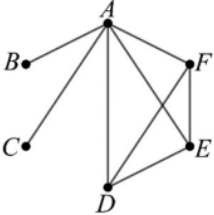
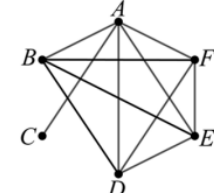
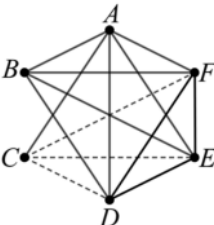
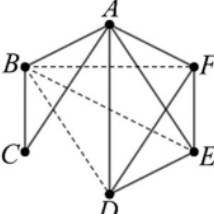
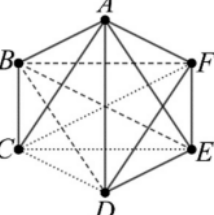
(A számokat a hozzájuk tartozó pontok betűjelével jelöljük.) Az A, B és C számok racionálisak $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^7}, \frac{1}{3^{12}}\right)$. Két racionális szám összege is racionális, ezért az ABC részgráf három éle be van húzva.	1 pont
A és E számok irracionálisak. (Két irracionális szám összege lehet racionális és irracionális is.) $E = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1$ $D + E = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 2$ tehát a DE él is be van húzva.	2 pont
Egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális, ezért több él nincs. 	1 pont
A gráfnak tehát összesen 4 éle van.	1 pont

211

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
(Az ismeretségi gráfban a pontokat a nevek betűivel jelöljük, az ismeretségek a gráf élei.) A $\{D, E, F\}$ részgráfban 3 él lehet.	1 pont
A 3 él bármelyike vagy szerepel a gráfban (ha a két személy ismeri egymást), vagy nem,	1 pont
ezért $2^3 = 8$-féle ismeretségi gráf (háló) lehetséges.	1 pont
b)	

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Az ismeretségi gráfban A ötödfokú pont, ezért minden más ponttal össze van kötve, továbbá a D, E, F pontok mindegyike össze van kötve a másik kettővel.	1 pont
	Ha a fentieknek megfelelő éleket berajzoljuk, akkor a B-ből még további 3, C-ből még további 2 élt kell meghúznunk. 1 pont
Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy a BC él benne van-e a gráfban, vagy sem.	1 pont
	I. eset: Ha a BC él nincs benne a gráfban, akkor a negyedfokú B pont össze van kötve a D, E, F pontok mindegyikével. Ez csak egyféleképpen lehetséges. 1 pont
	A harmadfokú C-ből kiinduló maradék 2 élt ekkor 3-féleképpen húzhatjuk be (C-t összekötjük a D, E, F pontok közül valamelyik kettővel). Az I. esetben tehát 3 lehetőség van összesen. 1 pont
	II. eset: Ha a BC él benne van a gráfban, akkor a B-ből kiinduló maradék 2 élt 3-féleképpen húzhatjuk be (B-t összekötjük a D, E, F pontok közül valamelyik kettővel). 1 pont
	Szintén 3-féleképpen húzható be a C-ből induló harmadik él (C-t összekötjük a D, E, F pontok valamelyikével). 1 pont
Ekkor $3 \cdot 3 (= 9)$ esetet kapunk.	1 pont
Az ismeretségi háló tehát $(3 + 3 \cdot 3 =)$ 12-féle lehet.	1 pont

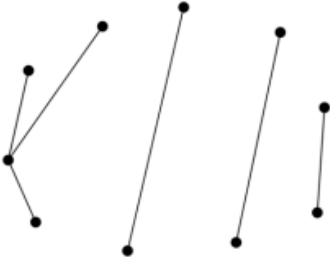
201

[Vissza a feladathoz.](#)

Az ADH, DCG, CBF, BAE háromszögek mindegyik éle pontosan egy háromszöghöz tartozik.	1 pont
Mivel (4 háromszög és) 3 zöld él van, lesz a háromszögek között olyan, amelynek minden éle kék (és ez egy gráfelméleti kör).	2 pont

202

[Vissza a feladathoz.](#)

Nem igaz.	1 pont
Jó ellenpélda, például: 	2 pont

203

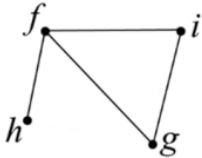
[Vissza a feladathoz.](#)

Egy olyan él, amelynek nincs közös csúcsa a piros éllel, a maradék $(n - 2)$ pontú teljes gráf egyik éle. Ilyen élből $\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ van.	2 pont
A piros él mindkét végpontjából $n - 2$ további él indul, tehát $2(n - 2)$ olyan él van, melynek van közös csúcsa az elsőnek kiválasztott éllel.	2 pont
Mivel $P(A) = P(B)$, és az összes eset száma megegyezik,	1 pont
ezért ugyanannyi-féleképpen választható a piros éllel közös csúcsú él, mint olyan él, amelynek azzal nincs közös csúcsa: $\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 2(n-2)$	2 pont
Mivel $n - 2 \neq 0$, ezért $\frac{(n-3)}{2} = 2$	1 pont
$n = 7$ (tehát 7 pontú a gráf).	1 pont

204

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
f zérushelyei -4 és 2 , g zérushelye -4 ,	1 pont
h zérushelyei -2 és 2 ,	1 pont
i zérushelyei -4 és 4 .	1 pont

	1 pont
c)	
(A p -nek egyetlen zérushelye lehet.) Fagráfban nincs izolált pont, ezért p zérushelye csak a k, m és n zérushelyeinek valamelyike lehet: $3, -3, 5$ vagy -5 .	1 pont
Ha a p zérushelye a 3 vagy a -5 lenne, akkor a gráfban létrejönne a $k - p - m$ vagy a $k - p - n$ kör. Ez tehát nem lehetséges.	1 pont
A -3 lehet a p zérushelye (ekkor $c = 3$).	1 pont
Az 5 lehet a p zérushelye (ekkor $c = -5$).	1 pont
Tehát a c konstans értéke kétféleképpen választható meg.	1 pont