

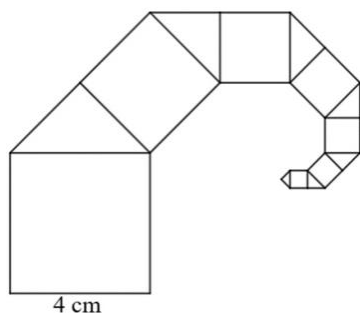
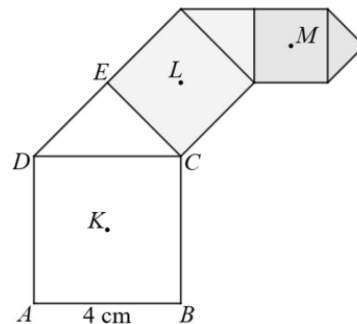
Határértékes feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámára kattintva találod meg.

261 | 2026. május idegen nyelvi 9./ d

A négyzet és a háromszög egyesítésével létrejött $ABCD$ ötszöget házikónak nevezzük. Az ötszög CE oldalára egy újabb, az eredetihez hasonló házikót rajzolunk, és annak a tetejére ismét egy hasonló házikót az ábra szerint. A három négyzet középpontját jelölje rendre K, L és M .

A fenti eljárást folytatva, n darab házikót egymáshoz illesztve egy házrendszert kapunk. Az ábrán az $n = 7$ eset látható.



Határozza meg az n házikóból álló házrendszer területének határértékét, ha $n \rightarrow \infty$.

[5 pont]

241 | 2024. május 5./a

Határozza meg az $a_n = \frac{n+4}{n}$ sorozat határértékét!

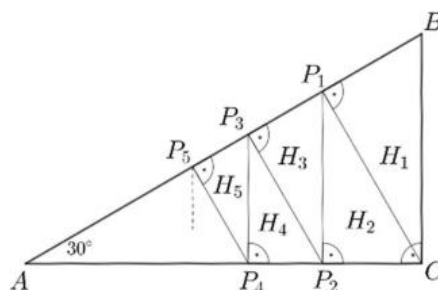
[3 pont]

242 | 2024. május idegen nyelvi 6./c

Az ABC derékszögű háromszög A csúcsánál fekvő szöge 30° -os.

A háromszögből az átfogójához tartozó CP_1 magassága mentén levágjuk a H_1 -gyel jelölt háromszöget. Az így megmaradó ACP_1 derékszögű háromszögben végrehajtjuk ugyanezt a lépést: a H_2 háromszöget vágjuk le a háromszög átfogójához tartozó P_1P_2 magassága mentén, és így tovább (lásd az ábrán).

Mekkora a végtelen sok szakaszból álló $CP_1P_2P_3P_4 \dots$ töröttvonal hosszának pontos értéke, ha $CP_1 = 2 - \sqrt{3}$?



[5 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

231 | 2023. október 7./c

Számítsa ki az $\{a_n\}$ sorozat határértékét, ha $a_n = \frac{30}{1+59 \cdot 0,905^n}$.

[3 pont]

221 | 2022. október 4./c

Adott az $a_n = \frac{2+2\pi n}{n}$ sorozat ($n \in \mathbb{N}^+$).

Igazolja, hogy ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos, és adja meg a sorozat határértékét!

[5 pont]

211 | 2021. május idegen nyelvi 9./c

Adott az $a_n = \frac{2}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ sorozat ($n \in \mathbb{N}^+$).

Határozza meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ határértéket!

[10 pont]

212 | 2021. október 5./b

Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1 = \binom{2}{2} = 1$, $a_2 = \binom{3}{2} = 3$, $a_3 = \binom{4}{2} = 6$ és így tovább, $a_n = \binom{n+1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

A fenti (a_n) sorozatból képezzük a (b_n) sorozatot: $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Mennyi a (b_n) sorozat határértéke?

[4 pont]

201 | 2020. május 8./a, b

Egy élelmiszergyártó kisüzem levesporkészítő részlegében 700 kg levespor van raktáron. A raktárkészlet csökkentése érdekében az eladással foglalkozó vezető azt tervezi, hogy minden hónapban először (eladással, jótékony célú ajándékozással) 24%-kal csökkentik az aktuális raktárkészletet, ezután a készletet megnövelik a havonta előállított 60 kg levesporral (így például az első hónap végén 592 kg levespor lesz raktáron).

- a) Ha sikerül a terv megvalósítása, akkor összesen hány kg levesport adnak/ajándékoznak el 18 hónap alatt?

[9 pont]

- b) Igazolja, hogy a tervezett módszert 18 hónapon túl (gondolatban akár végtelen sokáig) is alkalmazva a raktárkészlet minden hónapban csökken ugyan, de soha nem csökken 250 kg alá!

[7 pont]

Megoldások

261

[Vissza a feladathoz.](#)

Az első házikó területe $t_1 = 4 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 2}{2} = 20 \text{ cm}^2$.	1 pont
Az egymást követő házikók területének aránya $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$	1 pont
A házrendszerek területei egy olyan végtelen mértani sort alkotnak, amelynek első tagja 20 cm^2 , hányadosa pedig $0,5$ ($0 < q < 1$ miatt ennek létezik véges határértéke). Az n házikóból álló házrendszer területe: $S_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$	1 pont
$T = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{20}{1 - 0,5} =$	1 pont
$= 40 \text{ (cm}^2\text{) a házrendszer területe.}$	1 pont

241

[Vissza a feladathoz.](#)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n}{n} + \frac{4}{n}}{\frac{n}{n}}\right) =$	1 pont
$= \frac{1+0}{1} = 1$	2 pont

242

[Vissza a feladathoz.](#)

$\frac{P_1 P_2}{CP_1} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1 pont
(Hasonlósági megfontolások miatt) ez lesz az aránya a töröttvonal bármely két szomszédos szakasza hosszának.	1 pont
A töröttvonal egymást követő szakaszainak hossza tehát egy olyan mértani sorozatot alkot, melynek első tagja $CP_1 = 2 - \sqrt{3}$, hányadosa pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	1 pont

A végtelen töröttvonal hossza a (mértani sorozatból képzett) végtelen mértani sor összege (ez létezik, mert $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ teljesül), azaz	1 pont
$S = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} =$	
$= \frac{2 - \sqrt{3}}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = 2$	1 pont

231

[Vissza a feladathoz.](#)

A $\{0,905^n\}$ sorozat konvergens, és határértéke 0.	1 pont
Ezért az $\{a_n\}$ sorozat is konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \frac{30}{1+59 \cdot 0} = \frac{30}{1} = 30$.	2 pont

221

[Vissza a feladathoz.](#)

$a_n = \frac{2}{n} + 2\pi$	1 pont
A $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, 2π pedig állandó, ezért az a_n sorozat is szigorúan monoton csökkenő.	1 pont
A sorozat felülről korlátos, mert a csökkenő sorozat első tagja egy felső korlát; alulról is korlátos, mert a sorozat mindegyik tagja pozitív (ezért például a 0 egy alsó korlátja a sorozatnak).	1 pont
A $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ sorozat határértéke 0,	1 pont
ezért a megadott sorozat határértéke $(0 + 2\pi) = 2\pi$.	1 pont

211

[Vissza a feladathoz.](#)

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n =$ $= \frac{2}{2^2 - 1} + \frac{2}{3^2 - 1} + \dots + \frac{2}{(n+1)^2 - 1}$	1 pont
$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots +$ $+ \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$	2 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Négy kivételével mindegyik tört pozitív és negatív előjellel is szerepel. Az ellentett törtök összege nulla, ezért az első kettő pozitív és az utolsó kettő negatív tört marad az összegben: $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$	2 pont
Az összeg és különbség határértékére vonatkozó tétel,	1 pont
valamint $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2}\right) = 0$ miatt a keresett határérték:	2 pont
$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$	1 pont
$= \frac{3}{2} - (0 + 0) = \frac{3}{2}$	1 pont

212

[Vissza a feladathoz.](#)

$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{n+2}{2}}{\binom{n+1}{2}} = \frac{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)n}{2}} =$	1 pont
$= \frac{n+2}{n} =$	1 pont
$= 1 + \frac{2}{n}$	1 pont
(Az $n \mapsto \frac{2}{n}$ sorozat határértéke 0, ezért) a (b_n) sorozat határértéke 1.	1 pont

201

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
(Az n -edik hónap végi raktárkészletet jelölje S_n .) Az első hónap után $S_1 = 700 \cdot 0,76 + 60$, a 2. hónap után $S_2 = (700 \cdot 0,76 + 60) \cdot 0,76 + 60$, és így tovább, a 18. hónap után pedig $S_{18} = (... (700 \cdot 0,76 + 60) \cdot 0,76 + \dots) \cdot 0,76 + 60$ kg levespor lesz a raktárban (ahol a 0,76-os szorzók és a +60-as tagok száma is 18).	2 pont
A zárójeleket felbontva és a műveleteket elvégezve: $S_{18} = 700 \cdot 0,76^{18} + 60 \cdot 0,76^{17} + 60 \cdot 0,76^{16} + \dots + 60 =$	1 pont
$= 700 \cdot 0,76^{18} + 60 \cdot (0,76^{17} + 0,76^{16} + \dots + 1)$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

A zárójelben egy mértani sorozat 18 tagja szerepel (az első tag 1, a hányados 0,76). A mértani sorozat összegképletét használva: $S_{18} = 700 \cdot 0,76^{18} + 60 \cdot \frac{0,76^{18} - 1}{0,76 - 1} \approx$	2 pont
$(\approx 5,009 + 248,211) = 253,22$	1 pont
Eredetileg 700 kg volt a raktárkészlet, és a 18 hónap alatt még gyártottak $(18 \cdot 60 =)$ 1080 kg-ot.	1 pont
Így a terv megvalósulása esetén a 18 hónap alatt kb. $(700 + 1080 - 253 =)$ 1527 kg lesz az eladott/elajándékozott levespor mennyisége.	1 pont
b)	
(Az a) feladat megoldásában alkalmazottakhoz hasonló lépésekkel kapjuk, hogy) az n-edik hónap után $S_n = 700 \cdot 0,76^n + 60 \cdot 0,76^{n-1} + 60 \cdot 0,76^{n-2} + \dots + 60 \text{ kg}$ levespor lesz a raktárban.	1 pont
Felhasználva a mértani sorozat összegképletét: $S_n = 700 \cdot 0,76^n + 60 \cdot \frac{0,76^n - 1}{0,76 - 1}$	1 pont
$S_n = 700 \cdot 0,76^n - 250 \cdot (0,76^n - 1) = 450 \cdot 0,76^n + 250$	2 pont
A $\{0,76^n\}$ szigorúan monoton csökkenő sorozat, amelynek a határértéke 0.	1 pont
Ezért az $\{S_n\}$ is szigorúan monoton csökkenő sorozat, amelynek a határértéke 250. Ezzel a feladat mindkét állítását bizonyítottuk.	2 pont