

## Integrálás feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámaúra kattintva találod meg.

### 261 | 2026. május 7./b

Egy síkidomot az  $y = x^2$  egyenletű parabola, az  $x$  tengely, valamint az  $x = 1$  és az  $x = 7$  egyenletű egyenesek határolnak.

Határozza meg annak az  $y$  tengellyel párhuzamos egyenesnek az egyenletét, amelyik a síkidom területét felezi!

[5 pont]

### 262 | 2026. május idegen nyelvi 6./e

Adott az  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  függvény.

Határozza meg az  $f$  függvény grafikonja és az  $x$  tengely által közrezárt síkidom területét az  $[1; 2]$  intervallumon!

[4 pont]

### 251 | 2025. május 6./d

Határozza meg azokat a  $p \in [0; 2\pi]$  értékeket, amelyekre  $\int_0^p \sin x \, dx = \frac{1}{2}$ .

[5 pont]

### 252 | 2025. május idegen nyelvi 9./b

Adott az  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4$  egyenletű parabola és az  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$  egyenletű  $f$  egyenes.

Határozza meg a parabola és az  $f$  egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

[8 pont]

### 253 | 2025. október 8./c

Számítsa ki az  $y = -2x + 2$  egyenletű egyenes és az  $y = 0,5x^2 - 2x - 6$  egyenletű parabola által határolt korlátos síkidom területét!

[7 pont]

### 241 | 2024. május 5./d

Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett  $f(x) = 24(x + 1)(x + 3)$  függvény grafikonja és az  $x$  tengely által közbezárt korlátos síkidom területét!

[5 pont]

**242 | 2024. május idegen nyelvi 3./c**

Adott az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = -0,5x^2 + 3x$  másodfokú függvény.

Adja meg azt a valós számok halmazán értelmezett  $g$  függvényt, amelyre igaz, hogy  $g' = f$  és  $g(3) = 7$  ( $g'$  a  $g$  deriváltfüggvényét jelöli)!

[4 pont]

**243 | 2024. május idegen nyelvi 9./a**

Legyen  $f$  a valós számok halmazán értelmezett függvény, ahol  $f(x) = x^2$ .

Határozza meg  $a$  és  $b$  értékét, ha  $\int_a^b f(x) = 63$  és  $f'(a) = b$ .

[7 pont]

**244 | 2024. október 3./b**

Határozza meg az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \sin x$  függvény grafikonja, az  $x = \frac{\pi}{6}$  és az  $x = \frac{5\pi}{6}$  egyenletű egyenesek, valamint az  $x$  tengely által közrezárt korlátos síkidom területét!

[4 pont]

**231 | 2023. május 8./b**

Igazolja, hogy tetszőleges  $a < b$  paraméterek esetén  $\int_a^b (2x - 1) dx = (b - a)(b + a - 1)$ .

[4 pont]

**232 | 2023. május 8./c**

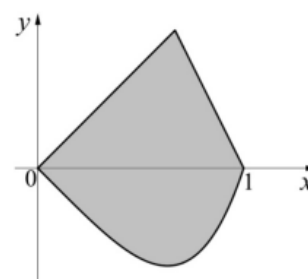
Határozza meg az  $a$  és  $b$  **egész** paraméterek lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy  $\int_a^b (2x - 1) dx = 8$  ( $a < b$ ).

[5 pont]

**233 | 2023. május 9./a**

Az ábrán egy medence méretarányos (kicsinyített) felülnézeti tervrajza látható. A medencét az  $y = x$  és az  $y = -2x + 2$  egyenletű egyenes, valamint az  $y = x^3 - x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) egyenletű görbe fogja közre.

Számítsa ki, hogy mekkora a tervezett medence alapterülete, ha a tervrajzon látható  $(0; 0)$  és  $(1; 0)$  pontok távolsága a valóságban 12 méter lesz!



[8 pont]

**234 | 2023. május idegen nyelvi 9./b**

A valós számok halmazán értelmezett  $f$  függvény  $f'$  deriváltfüggvényének hozzárendelési szabálya:  $f'(x) = (x - 2)^2 \cdot (x - 5)$ .

Határozza meg az  $f$  függvény hozzárendelési szabályát úgy, hogy az  $f$  grafikonja áthaladjon a  $(0; 1)$  ponton!

[5 pont]

**235 | 2023. október 4./c**

Számítsa ki  $\int_{-3}^2 \left( \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \right) dx$  értékét!

[3 pont]

**221 | 2022. május 9./c**

Adott az  $x^2 + 2y = 16$  egyenletű parabola és az  $x^2 + (y - 3)^2 = 9$  egyenletű kör.

Határozza meg a parabola és az  $x$  tengely által közrezárt korlátos síkidom területét!

[5 pont]

**222 | 2022. május idegen nyelvi 9./b**

Igazolja, hogy az  $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$  és az  $y = x^3 + 3$  egyenletű görbének két közös pontja van, és számítsa ki a görbék által közbezárt síkidom területét!

[6 pont]

**223 | 2022. október 4./b**

Adott az  $f(x) = \sin x$  és a  $g(x) = \left( \frac{2x}{\pi} \right)^2$  függvény ( $x \in \mathbf{R}$ ).

Határozza meg a két függvény grafikonja által közbezárt síkidom területét, ha  $x \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ !

[5 pont]

**211 | 2021. október 7./c**

Adott három pont a koordináta-rendszerben:  $A(1; 3)$ ,  $B(3; 5)$  és  $C(4; 4)$ .

Az  $y = \frac{1}{3}(-2x^2 + 11x)$  egyenletű  $g$  görbe áthalad a megadott  $A$  és  $B$  pontokon, a  $h$  egyenes pedig az origón és a  $C$  ponton.

Mekkora a  $g$  és  $h$  által közbezárt korlátos alakzat területe?

[7 pont]

**201 | 2020. május 5./d**

Adott egy másik, az  $y = -5,2 \cos(x) + 11,2$  egyenletű görbe, valamint az  $x = 0$ , az  $y = 0$  és az  $x = 2\pi$  egyenletű egyenesek.

Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

[4 pont]

**202 | 2020. május idegen nyelvi 4./b**

Adott az  $y = 7 - \frac{1}{2}x$  egyenletű  $e$  egyenes.

Számítsa ki annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet az  $y = -\frac{(x-4)^2}{4} + 7$  egyenletű parabola és az  $e$  egyenes határol!

[7 pont]

**203 | 2020. október 5./a**

Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = (x + 4)(2 - x)$$

$$g(x) = x + 4$$

$$h(x) = x^2 - 4$$

$$i(x) = |x| - 4$$

Határozza meg az  $f$  és  $g$  függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét!

[7 pont]

## Megoldások

261

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                 |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| (A parabola az $[1; 7]$ intervallumon az $x$ tengely „felett” van, így) a síkidom területe $\int_1^7 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^7 =$ | 1 pont |
| $= \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = 114$ területegység.                                                                                            | 1 pont |
| Ha a keresett egyenes egyenlete $x = p$ , akkor<br>$\int_1^p x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^p =$                                         | 1 pont |
| $= \frac{p^3 - 1}{3} = \frac{114}{2} = 57$                                                                                                      | 1 pont |
| Innen $p = \sqrt[3]{3 \cdot 57 + 1} = \sqrt[3]{172} \approx 5,56$ .<br>(Az egyenes egyenlete tehát $x = \sqrt[3]{172}$ .)                       | 1 pont |

262

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                        |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| (Az adott intervallumon $f$ nemnegatív.)<br>$T = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx =$ | 1 pont |
| $= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right]_1^2 =$                     | 1 pont |
| $= (4 - 16 + 22 - 12) - \left(\frac{1}{4} - 2 + \frac{11}{2} - 6\right) =$             | 1 pont |
| $(-2) - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{4}$                                       | 1 pont |

251

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                        |        |
|----------------------------------------|--------|
| $\int_0^p \sin x dx = [-\cos x]_0^p =$ | 1 pont |
| $= -\cos p - (-\cos 0) = \frac{1}{2},$ | 1 pont |

|                                                                     |        |
|---------------------------------------------------------------------|--------|
| amiből $-\cos p + 1 = \frac{1}{2}$ , tehát $\cos p = \frac{1}{2}$ . | 1 pont |
| A $[0; 2\pi]$ intervallumon $p_1 = \frac{\pi}{3}$ ,                 | 1 pont |
| és $p_2 = \frac{5\pi}{3}$ .                                         | 1 pont |

252

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                                                                                                   |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| (A parabola és az $f$ egyenes metszéspontjainak első koordinátáira:)<br>$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$                                                                                       | 1 pont |
| $x^2 - 10x + 21 = 0$                                                                                                                                                                                                              | 1 pont |
| $x_1 = 3$ vagy $x_2 = 7$ .                                                                                                                                                                                                        | 1 pont |
| A parabola a $[3; 7]$ -on az $f$ egyenes felett van.                                                                                                                                                                              | 1 pont |
| Így a kért terület:<br>$T = \int_3^7 \left( \left( -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4 \right) - \left( -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \right) \right) dx =$<br>$= \int_3^7 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2} \right) dx =$ | 2 pont |
| $= \left[ -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x \right]_3^7 = -\frac{49}{6} - \left( -\frac{81}{6} \right) = \frac{16}{3}$                                                                                             | 2 pont |

253

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                                             |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A görbék metszéspontjainak első koordinátáját a<br>$-2x + 2 = 0,5x^2 - 2x - 6$ egyenlet megoldásai adják.                                                                   | 1 pont |
| Rendezés után $x^2 = 16$ ,                                                                                                                                                  | 1 pont |
| ennek a gyökei $-4$ és $4$ .                                                                                                                                                | 1 pont |
| (Mivel az egyenes a $[-4; 4]$ intervallumon a parabola „fölött” helyezkedik el, ezért)<br>$T = \int_{-4}^4 (-2x + 2 - 0,5x^2 + 2x + 6) dx = \int_{-4}^4 (-0,5x^2 + 8) dx =$ | 1 pont |

|                                                                                              |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $= \left[ \frac{-0,5x^3}{3} + 8x \right]_{-4}^4 =$                                           | 1 pont |
| $= \left( -\frac{32}{3} + 32 \right) - \left( \frac{32}{3} - 32 \right) =$                   | 1 pont |
| $= \frac{128}{3}$<br>(A síkidom területe tehát $\frac{128}{3} \approx 42,67$ területegység.) | 1 pont |

241

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                         |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $24(x+1)(x+3) = 24x^2 + 96x + 72$                                                                                                       | 1 pont |
| Az $f$ függvény (amelynek grafikonja egy felfelé nyíló parabola) zérushelyei $-1$ és $-3$ .<br>$\int_{-3}^{-1} (24x^2 + 96x + 72) dx =$ | 1 pont |
| $= [8x^3 + 48x^2 + 72x]_{-3}^{-1} =$                                                                                                    | 1 pont |
| $= (-8 + 48 - 72) - (-216 + 432 - 216) = -32 - 0 =$                                                                                     | 1 pont |
| $= -32$ , és mivel a síkidom az $x$ -tengely „alatt” van, ezért a területe $32$ területegység.                                          | 1 pont |

242

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                 |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| (A $g$ az $f$ -nek primitív függvénye: $g \in \int f$ , tehát)<br>$g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c$ | 2 pont |
| A $g(3) = 7$ feltétel miatt $-\frac{1}{6} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 + c = 7$ ,                          | 1 pont |
| amiből $c = -2$ . (Tehát $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2$ .)                                       | 1 pont |

243

[Vissza a feladathoz.](#)

|                  |        |
|------------------|--------|
| $f'(x) = 2x$     | 1 pont |
| $f'(a) = 2a = b$ | 1 pont |

|                                                                                                            |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $\int_a^{2a} f(x) = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_a^{2a} = \frac{8a^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{7a^3}{3}$ | 2 pont |
| $\frac{7a^3}{3} = 63$                                                                                      | 1 pont |
| Ebből $a = 3$ , és így $b = 2a = 6$ .                                                                      | 2 pont |

244

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                                      |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| (A $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ intervallumon az $f$ függvény pozitív, így) a terület:<br>$T = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x \, dx =$ | 1 pont |
| $= [-\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$                                                                                                                     | 1 pont |
| $= -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$                                                                                           | 1 pont |
| $= \sqrt{3} \, (\approx 1,73)$                                                                                                                                       | 1 pont |

231

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                     |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $\int_a^b (2x - 1) \, dx = [x^2 - x]_a^b =$                                         | 1 pont |
| $= b^2 - b - a^2 + a =$                                                             | 1 pont |
| $= b^2 - a^2 - (b - a) = (b - a)(b + a) - (b - a) = (b - a)(b + a - 1)$<br>valóban. | 2 pont |

232

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                                      |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Felhasználjuk, hogy<br>$\int_a^b (2x - 1) \, dx = (b - a)(b + a - 1) = 8$<br>Mivel $b > a$ , ezért $b - a > 0$ , tehát $(b + a - 1)$ -nek is pozitívnak kell lennie. | 1 pont |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|

|                                                                                                                                                                                                                  |             |     |      |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-----|------|--------|
| Továbbá $a$ és $b$ egészek, tehát mindkét szorzótényező egész, így (a sorrendet is figyelembe véve) a 8 négyféleképpen bontható két tényező szorzatára:<br>$8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 1 \cdot 8$ . |             |     |      | 1 pont |
| Amiből:                                                                                                                                                                                                          |             |     |      | 2 pont |
| $b - a$                                                                                                                                                                                                          | $b + a - 1$ | $b$ | $a$  |        |
| 8                                                                                                                                                                                                                | 1           | 5   | -3   |        |
| 4                                                                                                                                                                                                                | 2           | 3,5 | -0,5 |        |
| 2                                                                                                                                                                                                                | 4           | 3,5 | 1,5  |        |
| 1                                                                                                                                                                                                                | 8           | 5   | 4    |        |
| Mivel $a$ és $b$ egészek, így két megoldása van a feladatnak: $a = -3, b = 5$ vagy $a = 4, b = 5$ .                                                                                                              |             |     |      | 1 pont |

233

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                          |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A medence tervrajzának $x$ tengely feletti része egy olyan háromszög, amelynek a harmadik csúcsa az $y = x$ és az $y = -2x + 2$ egyenesek metszéspontja. | 1 pont |
| $x = -2x + 2$ , amiből $x = \frac{2}{3}$ és $y = x = \frac{2}{3}$ .                                                                                      | 1 pont |
| A háromszög alakú rész területe tehát $\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}\right) \frac{1}{3}$ .                                                 | 1 pont |
| Az $x$ tengely alatti rész területe:<br>$-\int_0^1 (x^3 - x) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$                                     | 1 pont |
| $= \frac{1}{4}$                                                                                                                                          | 1 pont |
| A tervrajzon a medence területe $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{7}{12}$ (területegység).                                                   | 1 pont |
| Mivel a tervrajzon 1 egység a valóságban 12 m, ezért 1 területegység a valóságban ( $12^2 =$ ) $144 m^2$ .                                               | 1 pont |
| A medence területe $\frac{7}{12} \cdot 144 = 84 m^2$ lesz.                                                                                               | 1 pont |

234

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                 |        |
|---------------------------------|--------|
| $f'(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ | 1 pont |
| $f(x) \in \int f'(x) dx$        | 1 pont |

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

|                                                                                                                  |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 - 20x + c$                                                                  | 1 pont |
| (Mivel a grafikon áthalad a (0; 1) ponton, ezért) $f(0) = 1$ ,                                                   | 1 pont |
| tehát $c = 1$ (vagyis a keresett függvény értékeit az $f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 - 20x + 1$ adja meg). | 1 pont |

235

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                      |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $\int_{-3}^2 \left( \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \right) dx = \left[ \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x \right]_{-3}^2 =$           | 1 pont |
| $= \left( \frac{4}{3} - 4 + 2 \right) - \left( -\frac{9}{2} - 9 - 3 \right) = -\frac{2}{3} - (-16,5) = \frac{95}{6}$ | 2 pont |

221

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                 |        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Az $x^2 = 16$ egyenlet megoldásaiból kapjuk, hogy a parabola $-4$ -ben és $4$ -ben metszi az $x$ tengelyt.                      | 1 pont |
| A parabola és az $x$ tengely által közrezárt korlátos síkidom területe<br>$\int_{-4}^4 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right) dx =$ | 1 pont |
| $= \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 8x \right]_{-4}^4 =$                                                               | 1 pont |
| $= \left( -\frac{32}{3} + 32 \right) - \left( \frac{32}{3} - 32 \right) =$                                                      | 1 pont |
| $= \frac{128}{3}$                                                                                                               | 1 pont |

222

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                              |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Az $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3$ egyenletből $-4x^2 + 2x = 0$ adódik.                                      | 1 pont |
| Ennek az egyenletnek valóban két valós gyöke van: a 0 és a 0,5.<br>(A metszéspontok (0; 3) és (0,5; 3,125).) | 1 pont |

|                                                                                                                                                               |        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A kérdézet területet az<br>$\left  \int_0^{0,5} (x^3 - 4x^2 + 2x + 3 - (x^3 + 3)) dx \right $ értéke adja meg.                                                | 1 pont |
| $\left  \int_0^{0,5} (-4x^2 + 2x) dx \right  = \left  \left[ -\frac{4x^3}{3} + x^2 \right]_0^{0,5} \right  = \left  -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 0 \right  =$ | 2 pont |
| $= \frac{1}{12}$                                                                                                                                              | 1 pont |

223

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                                                                                                               |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| (Mivel az adott intervallumban $f(x) \geq g(x)$ , ezért) a síkidom területe:<br>$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin x - \left( \frac{2x}{\pi} \right)^2 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin x - \frac{4}{\pi^2} x^2 \right) dx =$ | 1 pont |
| $= \left[ -\cos x - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$                                                                                                                                                          | 2 pont |
| $= \left( -0 - \frac{\pi}{6} \right) - (-1 - 0) =$                                                                                                                                                                                            | 1 pont |
| $= -\frac{\pi}{6} + 1 (\approx 0,476)$                                                                                                                                                                                                        | 1 pont |

211

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                   |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A $h$ egyenes egyenlete $y = x$ .                                                                                                 | 1 pont |
| Megkeressük $g$ (parabola) és $h$ közös pontjait:<br>$\frac{1}{3}(-2x^2 + 11x) = x$                                               | 1 pont |
| Nullára rendezve: $0 = 2x^2 - 8x$ ,<br>ahonnan $x = 0$ , illetve $x = 4$ .<br>(Két közös pont van, az origó és a $C(4; 4)$ pont.) | 1 pont |

|                                                                                                                                                                                        |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A két metszéspont között a parabola az egyenes fölött helyezkedik el, ezért a keresett területet az<br>$\int_0^4 \left( \frac{1}{3}(-2x^2 + 11x) - x \right) dx$ integrál értéke adja. | 1 pont |
| $\int_0^4 \left( \frac{1}{3}(-2x^2 + 11x) - x \right) dx = \left[ -\frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 \right]_0^4 =$                                                                      | 2 pont |
| $= \left( -\frac{2}{9} \cdot 4^3 + \frac{4}{3} \cdot 4^2 \right) = \frac{64}{9}$                                                                                                       | 1 pont |

201

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                             |        |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------|
| A terület:<br>$\int_0^{2\pi} (-5,2 \cos(x) + 11,2) dx$                      | 1 pont |
| $\int_0^{2\pi} (-5,2 \cos(x) + 11,2) dx = [-5,2 \sin(x) + 11,2]_0^{2\pi} =$ | 2 pont |
| $= (0 + 11,2 \cdot 2\pi) - (0 + 0) \approx 70,37$                           | 1 pont |

202

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                                                                                                                      |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A két görbe közös pontjainak első koordinátáját a<br>$7 - \frac{1}{2}x = -\frac{(x-4)^2}{4} + 7$ egyenlet megoldásai adják.                                                                                                                          | 1 pont |
| $x^2 - 10x + 16 = 0$                                                                                                                                                                                                                                 | 1 pont |
| innen $x_1 = 2, x_2 = 8$                                                                                                                                                                                                                             | 1 pont |
| Legyen<br>$f: x \mapsto 7 - \frac{1}{2}x$ és $g: x \mapsto -\frac{(x-4)^2}{4} + 7$ ( $x \in \mathbf{R}$ )<br>(Mivel a $g$ grafikonja a metszéspontok között az $f$ grafikonja fölött van, ezért)<br>a kért területre fennáll: $T = \int_2^8 (g - f)$ | 1 pont |
| $g(x) - f(x) = -\frac{(x-4)^2}{4} + 7 - 7 + \frac{1}{2}x = \frac{-x^2 + 10x - 16}{4}$                                                                                                                                                                | 1 pont |

|                                                                                                                                                                                    |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $T = \int_2^8 \frac{-x^2 + 10x - 16}{4} dx = \left[ -\frac{x^3}{12} + \frac{5x^2}{4} - 4x \right]_2^8 =$                                                                           | 1 pont |
| $= -\frac{8^3}{12} + \frac{5 \cdot 8^2}{4} - 4 \cdot 8 - \left( -\frac{2^3}{12} + \frac{5 \cdot 2^2}{4} - 4 \cdot 2 \right) =$<br>$= \frac{16}{3} + \frac{11}{3} = 9 \text{ (te)}$ | 1 pont |

203

[Vissza a feladathoz.](#)

|                                                                                                                                                                                                                                              |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| (Az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásával megkeressük a két függvénygrafikon metszéspontjait.)<br>$(x + 4)(2 - x) = x + 4$<br>$0 = x^2 + 3x - 4$                                                                                               | 2 pont |
| Innen $x = -4$ és $x = 1$ .                                                                                                                                                                                                                  | 1 pont |
| A kért terület (a két metszéspont között) az<br>$\left  \int_{-4}^1 ((x + 4)(2 - x) - (x + 4)) dx \right $<br>értéke adja meg.                                                                                                               | 1 pont |
| $\left  \int_{-4}^1 (-x^2 - 3x + 4) dx \right  = \left  \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^1 \right  =$<br>$= \left  \left( -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left( -\frac{64}{3} - 24 - 16 \right) \right  =$ | 2 pont |
| $= \left  \frac{13}{6} - \left( -\frac{56}{3} \right) \right  = \frac{125}{6}$                                                                                                                                                               | 1 pont |