ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2026. október 13.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

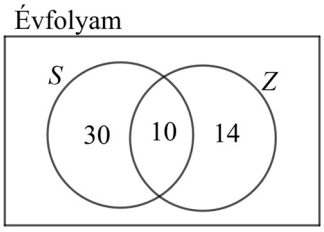
I.

1.		
$(35\,000 \cdot 0{,}7 =)$ 24 500 Ft	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$\left(\frac{13 \cdot 10}{2} =\right) 65$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
$(5 \cdot 3 \cdot 2 =)$ 30	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$a_7 = (8 \cdot 0{,}5^6 =) 0{,}125$	1 pont	
$S_7 = \left(8 \cdot \frac{0{,}5^7 - 1}{0{,}5 - 1} = \frac{127}{8} =\right) 15{,}875$	2 pont	$8 + 4 + 2 + \ldots + \frac{1}{8} = 15{,}875$
Összesen:	**3 pont**	

5.		
40 + 24 – 10 = 54 olyan tanuló van, aki sportol vagy zenél.	2 pont	
67 – 54 = 13 olyan tanuló van, aki se nem sportol, se nem zenél.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
$(a^2 - b^2 + 9b^2 =)\ a^2 + 8b^2$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A harmadik oldal hosszát c-vel jelölve, a koszinusztétel alapján: $c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 49$.	2 pont	
Ebből $c = 7$ (cm).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8.		
A	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

9.		
I. igaz II. hamis III. igaz	2 pont	*Két jó válasz esetén 1, egy jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
$x = -6$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
Ilyen gráf nincs.	1 pont	
Ha lenne ilyen gráf, akkor abban a fokszámok összege 15 lenne. Ez nem lehetséges, mert bármely gráfban a fokszámok összege páros szám.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

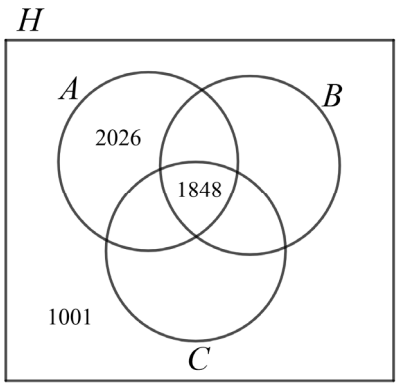
12. **első megoldás**		
Az összes eset száma $2^4 = 16$.	1 pont	
A kedvező esetek: FFII, FIFI, FIIF, IFFI, IFIF, IIFF, ezek száma tehát 6.	2 pont	
A kérdéses valószínűség így $\frac{6}{16} = 0{,}375$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12. **második megoldás**		
A fej és az írás dobásának a valószínűsége is $\frac{1}{2}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A kérdéses valószínűség meghatározható a visszatevéses mintavétel segítségével:) $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$	2 pont	
$= 0{,}375$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

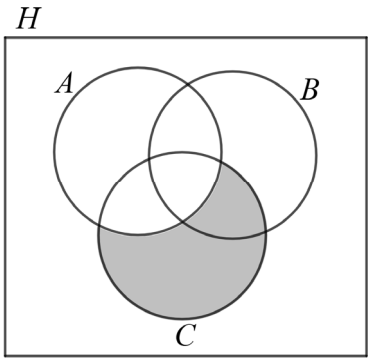
II. A

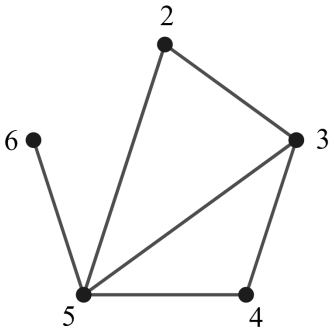
13. a)		
Az egyenlet bal oldalán álló törteket közös nevezőre hozva: $\frac{18x+24}{30}-\frac{5x+25}{30}=3$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az egyenlet mindkét oldalát megszorozza* 30*-cal.*
$18x + 24 – 5x – 25 = 90$	1 pont	
$13x = 91$	1 pont	
$x = 7$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)		
(A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt) $x \geq –3{,}5$ és (értékkészlete miatt pedig) $x \geq 4$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel mindkét gyököt ellenőrzi.*
Négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát: $2x+7=x^2-8x+16$.	2 pont	
Rendezve: $x^2-10x+9=0$.	1 pont	
Ebből $x = 1$ vagy $x = 9$.	2 pont	
A [4; ∞[intervallumon ekvivalens átalakításokat végeztünk, így $x = 1$ nem megoldás, $x = 9$ megoldás.	1 pont	*Ellenőrzés behelyettesítéssel:* $x = 1$ *nem megoldás,* $x = 9$ *megoldás.*
Összesen:	**7 pont**	

14. a)		
	1-1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

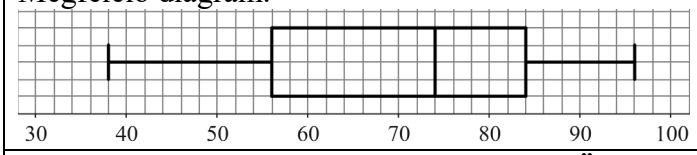
14. b)		
Például: $C \setminus B$.	2 pont	$(A \cap C) \setminus B$
Összesen:	**2 pont**	

14. c)		
	2 pont	*Egy hiba (kihagyott vagy tévesen satírozott tartomány) esetén 1 pont jár. Egynél több hiba esetén nem jár pont.*
Összesen:	**2 pont**	

14. d)		
	3 pont*	*Egy hiba (kihagyott vagy tévesen behúzott él) esetén 2 pont, két vagy három hiba esetén 1 pont jár. Háromnál több hiba esetén nem jár pont.*
A fokszámok összege (2 + 3 + 2 + 4 + 1 =) 12.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a gráf éleinek berajzolása nélkül helyesen indokol.*

15. a)		
A 40 tanuló összpontszáma $25 \cdot 74 + 15 \cdot 66 = 2840$.	2 pont	
A két osztály 40 diákjának átlageredménye $\frac{2840}{40} = 71$ pont.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b)		
A legnagyobb pontszám (38 + 58 =) 96.	1 pont	
(A medián 74, ami a 9. és 10. pontszám átlaga, így) a 9. adat 71.	1 pont	
(Mivel egyetlen módusz van, és van két darab 60 pontos dolgozat, így legalább három darab 81 pontos dolgozatnak kellett lennie) a 13. adat 81.	1 pont	
Az adatok alsó kvartilise (az 5. adat) 56,	1 pont	
felső kvartilise (a 14. adat) 84.	1 pont	
Megfelelő diagram.  	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. c) **első megoldás**		
(A kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe.) Összesen $\binom{18}{2} = 153$-féleképpen választhatunk ki két dolgozatot.	1 pont	*(A kiválasztás sorrendjét figyelembe vesszük.)* *Összesen* $18 \cdot 17 = 306$*-féleképpen választhatunk ki két dolgozatot.*
Nyolc dolgozat eredménye lett legalább 80 pont, közülük $\binom{8}{2} = 28$-féleképpen választhatunk ki kettőt (kedvező esetek száma).	1 pont	*A kedvező esetek száma:* $8 \cdot 7 = 56$.
A keresett valószínűség $\frac{28}{153} \approx 0{,}183$.	1 pont	$\frac{56}{306}$
Összesen:	**3 pont**	

15. c) **második megoldás**		
(A kiválasztás sorrendjét figyelembe vesszük.) Annak a valószínűsége, hogy elsőre a 8 legalább 80 pontos dolgozatból választunk egyet: $\frac{8}{18}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy másodikra is legalább 80 pontos dolgozatot választunk: $\frac{7}{17}$.	1 pont	
A keresett valószínűség ezek szorzata, azaz $\frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \approx 0{,}183$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. B

16. a)		
(Az *OAB* háromszög derékszögű.) A *B* csúcsnál lévő szöget β-val jelölve $\operatorname{tg}\beta = \frac{8}{6}$,	1 pont	
amiből $\beta \approx 53{,}1°$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. b) első megoldás		
Az egyenes meredeksége $-\frac{6}{8}\left(=-\frac{3}{4}\right)$.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Az egyenes az *y* tengelyt a 6-nál metszi.	1 pont	
Az egyenes egyenlete $y = -\frac{6}{8}x + 6$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b) második megoldás		
Az egyenes egyenletét $y = mx + b$ alakban keresve a megoldandó egyenletrendszer: $\left.\begin{aligned} 0 &= m\cdot 8 + b \\ 6 &= m\cdot 0 + b \end{aligned}\right\}$.	1 pont	
A második egyenletből $b = 6$,	1 pont	
így (az első egyenletből) $m = -0{,}75$. (Az egyenes egyenlete tehát $y = -0{,}75x + 6$.)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b) harmadik megoldás		
Az egyenes egy irányvektora (–8; 6).	1 pont	*Egy normálvektor* (6; 8).
Az egyenes egyenlete $6x + 8y = 48$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a két pontra illeszkedő egyenes egyenletével vagy a tengelymetszetes egyenlettel jól dolgozik, akkor a teljes pontszám jár.

16. c)		
A háromszög derékszögű, ezért a Thalész-tétel megfordítása miatt a háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kör középpontja a (4; 3) pont.	1 pont*	

Az átfogó hossza $\sqrt{8^2+6^2}=10$,	1 pont	*A középpont távolsága a csúcsoktól* $\sqrt{4^2+3^2}=5$.
így a kör sugarának hossza 5.	1 pont	
A kör egyenlete $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A háromszög köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A befogók felezőmerőlegeseinek az egyenlete $x=4$ és $y=3$, azaz a kör középpontja (4; 3).	1 pont	

16. d)		
A keletkező forgástest egy henger és egy kúp egyesítése, mindkét test alapkörének sugara 3 egység.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A *CD* szakasz hossza, azaz a henger magassága (az *AOB* háromszög egyik középvonala) 4 egység,	1 pont	
így a henger térfogata $3^2\cdot\pi\cdot 4=36\pi\approx 113$.	1 pont	
A kúp magassága szintén 4 egység,	1 pont	
így a kúp térfogata $\frac{3^2\cdot\pi\cdot 4}{3}=12\pi\approx 38$.	1 pont	
A test térfogata a henger és a kúp térfogatának összege, azaz $36\pi+12\pi=48\pi\approx 151$ (térfogategység).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. a)		
(Május végétől november végéig 6 hónap telt el.) A követők számának havi növekedését d-vel jelölve (millió főben számolva): $1{,}51+6d=2{,}05$.	1 pont	
Ebből $d=0{,}09$.	1 pont	
A 2025. május végétől eltelt hónapok számát n-nel jelölve: $1{,}51+n\cdot 0{,}09\geq 4$.	1 pont	*A 2025. november végétől eltelt hónapok számát m-mel jelölve:* $2{,}05+m\cdot 0{,}09\geq 4$.
Ebből $n\geq 27{,}\dot{6}$.	1 pont	$m\geq 21{,}\dot{6}$
Tehát a modell szerint (2025. május vége után a 28. hónapban, azaz) 2027 szeptemberében éri el a követők száma a 4 milliót.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

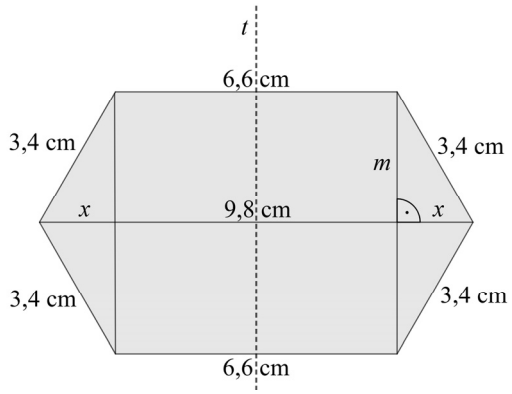
Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.

17. b)		
(Május végétől november végéig 6 hónap telt el.) A havi növekedési ütemet q-val jelölve (millió főben számolva): $1,51\cdot q^6 = 2,05$.	1 pont	
Ebből $q = \sqrt[6]{\frac{2,05}{1,51}} \approx \sqrt[6]{1,358} \approx 1,052$.	1 pont	
A 2025. május végétől eltelt hónapok számát n-nel jelölve megoldandó az $1,51\cdot 1,052^n = 4$ egyenlet.	1 pont	*A 2025. november végétől eltelt hónapok számát m-mel jelölve:* $2,05\cdot 1,052^m = 4$.
Ebből $1,052^n \approx 2,649$,	1 pont	$1,052^m \approx 1,951$
amiből $n = \log_{1,052} 2,649 \left(= \frac{\lg 2,649}{\lg 1,052} \right) \approx 19,2$,	1 pont	$m \approx 13,2$
tehát a modell szerint (2025. májusa után a 20. hónapban, azaz) 2027 januárjában éri el a követők száma a 4 milliót.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.

17. c)		
A havi megtekintések tervezett száma egy olyan számtani sorozattal modellezhető, melynek első tagja 10 ezer, differenciája 5 ezer, az első n tag összege pedig 500 ezer.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A számtani sorozat tagjait ezerben számolva az első n tag összege: $\frac{20+(n-1)\cdot 5}{2}\cdot n = 500$.	1 pont	
Rendezve $5n^2 + 15n - 1000 = 0$.	2 pont	
Az egyenlet pozitív gyöke kb. 12,7 (a negatív gyök kb. –15,7),	1 pont	
azaz a terveik alapján a 13. hónapban érik el, hogy összesen 500 ezer megtekintésük legyen.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként felírva és a tagokat összeadva helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

18. a)		
A csokigolyók sugara 1,25 cm.	1 pont	
Egy golyó térfogata $\frac{4\cdot 1,25^3\cdot\pi}{3}\approx 8,18$ cm^3.	1 pont	
A 15 csokigolyó össztérfogata kb. 123 cm^3.	1 pont	
 Az alaplapot két egybevágó szimmetrikus trapézra (vagy egy téglalapra és két egybevágó egyenlőszárú háromszögre) osztjuk az ábra szerint. Ekkor $x=\frac{9,8-6,6}{2}=1,6$ cm.	1 pont	
A trapéz magassága Pitagorasz-tétellel: $m=\sqrt{3,4^2-1,6^2}=3$ cm.	1 pont	
Az alaplap területe $2\cdot\frac{9,8+6,6}{2}\cdot 3=49,2$ cm^2.	1 pont	$6,6\cdot 6+2\cdot\frac{6\cdot 1,6}{2}$
A doboz térfogata $49,2\cdot 15=738$ cm^3.	1 pont	
$\frac{123}{738}\approx 0,167$,	1 pont	
így a csokigolyók össztérfogata a doboz térfogatának kb. 17%-a.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

18. b)		
12 csokigolyó fajtája meghatározott.	1 pont	*Három eset lehetséges a fajták eloszlását tekintve:* 3-3-3-6, 3-3-4-5, 3-4-4-4.
Ha a maradék 3 csokigolyó ugyanolyan fajtájú, akkor 4 lehetőség van.	1 pont	
Ha valamelyik fajtából 2-t, egy másikból pedig 1-et választunk, akkor $4 \cdot 3 = 12$ lehetőség van.	1 pont	
Ha három fajtából választunk 1-1-et, akkor 4 lehetőség van.	1 pont	
Összesen tehát (4 + 12 + 4 =) 20-féle megfelelő összeállítás létezik.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja a lehetséges eseteket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

18. c) első megoldás		
(A húzások sorrendjét figyelembe véve) összesen $6 \cdot 5 = 30$-féleképpen vehet ki Andrea két csokigolyót (összes eset száma).	1 pont	*(Ha nem vesszük figyelembe a húzások sorrendjét, akkor)* $\binom{6}{2} = 15$ *-félképpen vehet ki két csokigolyót.*
Ezek közül (2 + 2 + 2 =) 6 esetben vesz ki két ugyanolyan fajtájú csokit (kedvező esetek száma).	1 pont	*A kedvező esetek száma ekkor* 3.
A kérdezett valószínűség tehát $\frac{6}{30} = 0,2$.	1 pont	$\frac{3}{15}$
Összesen:	**3 pont**	

18. c) második megoldás		
Elsőre bármilyen fajtájú csokigolyót húzhat Andrea.	1 pont	
Második húzásra a maradék 5 csokigolyó közül egy lesz ugyanolyan fajta, mint az első.	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát $\frac{1}{5} = 0,2$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	