

Koordinátageometria feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámaúra kattintva találod meg.

251 | 2025. május 4./a, b

Adott az $A(5; 14)$ és a $B(7; 6)$ pont a koordináta-rendszerben.

- a) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az A és a B pontokra, és a középpontja az y tengelyen van!

[7 pont]

- b) Az $y = \frac{1}{2p}(x - u)^2 + v$ egyenletű parabola tengelypontja a B pont, és a parabola illeszkedik az A pontra. Határozza meg a parabola p paraméterének értékét!

[4 pont]

252 | 2025. május idegen nyelvi 9./a

Az ABC egyenlőszárú háromszög alapjának egyik végpontja $B(0; 4)$, a szárak metszéspontja $A(3; 0)$. A háromszög alapjának másik végpontja az $x + 2y = 8$ egyenletű e egyenesre illeszkedik.

Határozza meg a háromszög C csúcsának koordinátáit!

[8 pont]

253 | 2025. október 4./a, b

A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(-12; 21)$ és a $B(6; -3)$ pont.

- a) Adja meg a pontok által meghatározott szakasz f felezőmerőlegesének egyenletét, és számítsa ki, hány fokos szöget zár be az f egyenes az y tengellyel!

[6 pont]

Egy 26 egység sugarú kör áthalad a $P(24; 6)$ ponton, a középpontja pedig illeszkedik az y tengelyre.

- b) Határozza meg a kör egyenletét!

[6 pont]

241 | 2024. május 8./a, b

A k_1 kör egyenlete a derékszögű koordináta-rendszerben $x^2 - 4x + y^2 - 12y = 13$.

- a) Határozza meg a k_1 kör sugarát és középpontjának koordinátáit!

[3 pont]

A k_1 körbe írható $ABCD$ húrtrapéz csúcsai $A(4; 13)$, $B(-5; 4)$, $C(4; -1)$ és $D(9; 4)$.

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

b) Határozza meg a húrtrapéz magasságát és szögeit!

[8 pont]

242 | 2024. május 8./c

A k_2 kör egyenlete a derékszögű koordináta-rendszerben $x^2 + y^2 = 53$.

Hány olyan pont található a k_2 körvonalon, amelynek mindkét koordinátája egész szám?

[5 pont]

221 | 2022. május 6./a, b

Egy egyenlőszárú háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0; 0)$, $B(82; 0)$ és $C(41; 71)$. Géza szerint ez a háromszög szabályos.

a) Határozza meg a háromszög szögeit fokban, három tizedesjegyre kerekítve!

[5 pont]

b) Határozza meg a háromszög AC és AB oldalainak arányát négy tizedesjegyre kerekítve!

[3 pont]

222 | 2022. május 9./a, b

Adott az $x^2 + 2y = 16$ egyenletű parabola és az $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ egyenletű kör.

a) Határozza meg a parabola fókuszpontjának és a kör középpontjának a koordinátáit!

[4 pont]

b) Igazolja, hogy a $Q(2\sqrt{2}; 4)$ pont a parabolának és a körnek is pontja, és a kör Q -ban húzott érintője érinti a parabolát is!

[7 pont]

223 | 2022. május idegen nyelvi 2./b, c

Jelölje x és y a derékszögű koordináta-rendszer egy tetszőleges pontjának első, illetve második koordinátáját, és legyen c egy valós szám.

b) Igaz-e a következő állítás?

Ha $c \leq 12$, akkor $x^2 + 4x + y^2 - 6y + c = 0$ egy kör egyenlete.

(Válaszát indokolja!)

[4 pont]

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! (Válaszát indokolja!)

[3 pont]

224 | 2022. október 1./a, b, c

Adott a $C(-6; -2)$ és a $P(-3; 2)$ pont.

- a) Írja fel a C középpontú, P ponton átmenő k kör egyenletét!

[2 pont]

- b) Írja fel a k kör P pontra illeszkedő érintőegyenésének egyenletét!

[3 pont]

A C és P pontokon áthaladó egyenes és a két koordinátatengely egy derékszögű háromszöget határoz meg.

- c) Határozza meg a háromszög köré írható kör sugarának hosszát!

[6 pont]

211 | 2021. május 4./a

Adott az $y = 0,25x(x - 5)^2$ ($0 \leq x \leq 5$) egyenletű görbe.

Igazolja, hogy az origó és az $(5; 0)$ pont is rajta van a görbén!

[2 pont]

212 | 2021. május idegen nyelvi 4./a, b, c

Adott az $x^2 - 4y = 0$ egyenletű parabola és az $x - y = 5$ egyenletű g egyenes.

- a) Igazolja, hogy a parabola fókuszpontja az $F(0; 1)$ pont!

[3 pont]

- b) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a g egyenesen van, valamint átmegy a $P(0; -1)$ ponton és a parabola F fókuszpontján is!

[5 pont]

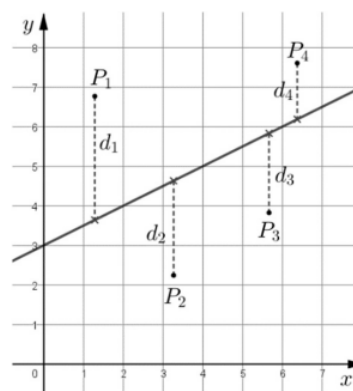
- c) Adja meg a parabola g egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét!

[5 pont]

213 | 2021. október 7./a, b

A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.

Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az y tengellyel.)



Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

- a) Határozza meg az $R(4; 2)$ és az $S(4; 5)$ pontok függőleges távolságát az $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ egyenestől!

[3 pont]

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak négyzetösszege (az ábrán látható példában $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$).

Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.

Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1; 3)$, $B(3; 5)$ és $C(4; 4)$.

- b) Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen* az A, B és C pontokra! ($m \in \mathbf{R}$)

[6 pont]

201 | 2020. május 7./b, c

A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2; 0)$, $Q(6; 0)$ és $R(0; 5)$ pontok, a H pedig a PQ szakasz tetszőleges pontja.

- b) Számítsa ki a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $H(-1,8; 0)$.

[2 pont]

- c) Adja meg a H pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

[7 pont]

202 | 2020. május idegen nyelvi 4./a

Adott az $y = 7 - \frac{1}{2}x$ egyenletű e egyenes.

Egy négyzet egyik csúcsa az origó, egyik átlójának egyenese pedig az e . Számítsa ki a négyzet középpontjának koordinátáit és a négyzet területét!

[7 pont]

Megoldások

251

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A keresett kör középpontja az AB szakasz felezőmerőlegesének és az y tengelynek a metszéspontja.	1 pont
Az AB szakasz felezőpontja: $F_{AB}\left(\frac{5+7}{2}; \frac{14+6}{2}\right) = (6; 10)$	1 pont
A felezőmerőleges egy normálvektora: $\overrightarrow{AB}(7-5; 6-14) = (2; -8),$	1 pont
így az egyenlete: $2x - 8y = (2 \cdot 6 - 8 \cdot 10) = -68.$	1 pont
$x = 0$ esetén $y = 8,5$, tehát a kör középpontjának koordinátái $(0; 8,5)$.	1 pont
A kör sugara a középpont és például az A pont távolsága: $\sqrt{5^2 + (14 - 8,5)^2} = \sqrt{55,25} (\approx 7,43).$	1 pont
A kör egyenlete $x^2 + (y - 8,5)^2 = 55,25.$	1 pont
b)	
Mivel $B(7; 6)$ a parabola tengelypontja, ezért a parabola egyenlete: $y = \frac{1}{2p}(x - 7)^2 + 6$	1 pont
Behelyettesítve az A pont koordinátáit: $14 = \frac{1}{2p}(5 - 7)^2 + 6$	1 pont
$8 = \frac{4}{2p}$	1 pont
amiből $p = \frac{1}{4}.$	1 pont

252

[Vissza a feladathoz.](#)

A C csúcs az A csúcs körüli AB sugarú k körívre illeszkedik.	1 pont
Az AB sugár hossza $\sqrt{9 + 16} = 5,$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

a k kör egyenlete $(x - 3)^2 + y^2 = 25$.	1 pont
(A k kör és az e egyenes közös pontjai a lehetséges C pontok.) Az e egyenletéből: $x = 8 - 2y$. A k egyenletébe behelyettesítve: $(5 - 2y)^2 + y^2 = 25$. Ebből $y^2 - 4y = 0$.	2 pont
$y = 4$ vagy $y = 0$.	1 pont
$y = 4$ esetén $x = 0$, tehát $C(0; 4)$, ami egybeesik a B ponttal, így a három pont nem alkot háromszöget, tehát ez nem megoldás.	1 pont
$y = 0$ esetén $x = 8$, tehát $C(8; 0)$, ami valóban megfelel. (A, B és C három különböző pont, amelyek nem esnek egy egyenesre.)	1 pont

253

[Vissza a feladathoz.](#)

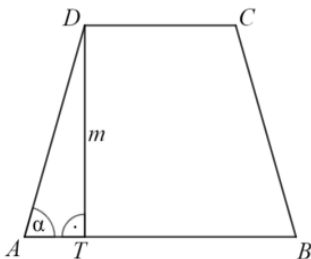
a)	
Az AB szakasz F felezőpontjának koordinátái $(-3; 9)$.	1 pont
f meredeksége $\frac{3}{4}$.	1 pont
$f: y - 9 = \frac{3}{4}(x + 3)$ $\left(y = \frac{3}{4}x + \frac{45}{4}\right)$	1 pont
Jelölje α az f egyenes és az x tengely által bezárt szöget (f irányszögét). Ekkor $\tan \alpha = \frac{3}{4}$,	1 pont
innen $\alpha \approx 36,9^\circ$.	1 pont
Az y tengely és f bezárt szöge α pótszöge, kb. $53,1^\circ$.	1 pont
b)	
A keresett kör középpontja legyen $C(0; v)$, ekkor a kör egyenlete $x^2 + (y - v)^2 = 26^2$	1 pont
(P rajta van a körön, ezért) $24^2 + (6 - v)^2 = 26^2$.	1 pont
Ebből $(6 - v)^2 = 100$, innen $6 - v = 10$ vagy $6 - v = -10$.	1 pont
$v = -4$ vagy $v = 16$ (tehát $C_1(0; -4)$ vagy $C_2(0; 16)$).	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

A keresett kör egyenlete: $x^2 + (y + 4)^2 = 26^2$ vagy $x^2 + (y - 16)^2 = 26^2$.	2 pont
---	--------

241

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A kör egyenletét átalakítva: $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 53$.	1 pont
A kör sugara $\sqrt{53}$,	1 pont
a kör középpontja (2; 6).	1 pont
b)	
Az alapok hossza (például a két pont távolságára vonatkozó képlettel) $AB = 9\sqrt{2}$ és $CD = 5\sqrt{2}$. A szárak hossza $AD = BC = \sqrt{106}$.	2 pont
	1 pont
(A húrtrapéz tengelyes szimmetriája miatt): $AT = \frac{1}{2} \cdot (AB - CD) = 2\sqrt{2}$	1 pont
$m = \sqrt{AD^2 - AT^2} = \sqrt{106 - 8} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} (\approx 9,90)$	1 pont
$\cos \alpha = \left(\frac{AT}{AD} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{106}} (\approx 0,2747)$	1 pont
amiből $\alpha \approx 74,05^\circ$.	1 pont
gy a húrtrapéz hegyesszögei $74,05^\circ$ -osak, tompaszögei pedig $180^\circ - 74,05^\circ = 105,95^\circ$ -osak.	1 pont

242

[Vissza a feladathoz.](#)

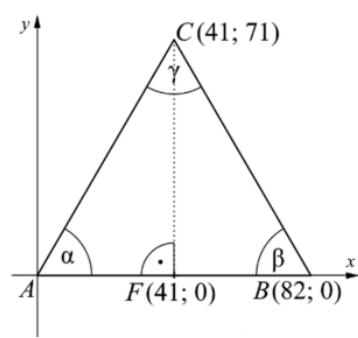
(Az 53-at két négyzetszám összegére kell bontani.) $0 + 53 = 1 + 52 = 4 + 49 = 9 + 44 = 16 + 37 = 25 + 28$, tehát ez a két négyzetszám csak a 4 és a 49 lehet, melyek (valamilyen sorrendben) a keresett pontok két koordinátájának négyzetei.	2 pont
---	--------

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Így a kör egyenletében szereplő x helyére 4 különböző értéket helyettesíthetünk $(2, -2, 7, -7)$.	1 pont
Ezek mindegyikéhez két-két y érték tartozik.	1 pont
Tehát összesen 8 ilyen pont van.	1 pont

221

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
 Az AB oldal felezőpontja $F(41; 0)$, így az AFC derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{71}{41}$ Ebből $\alpha \approx 59,9951^\circ$	2 pont
Mivel $AC = BC$, ezért a B csúcsnál fekvő szög $\beta \approx 59,9951^\circ$.	1 pont
$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - 119,9902^\circ = 60,0098^\circ$.	1 pont
Három tizedesjegyre kerekítve a háromszög szögei $59,995^\circ$, $59,995^\circ$ és $60,010^\circ$. (Tehát Gézának nincs igaza, a háromszög nem szabályos.)	1 pont
b)	
$AC = \sqrt{6722} (\approx 81,9878)$	1 pont
Így $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{6722}}{82} (\approx 0,999851)$	1 pont
Négy tizedesjegyre kerekítve az arány 0,9999.	1 pont

222

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A parabola egyenlete átrendezve: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Ez tehát egy „lefelé nyíló” parabola, melynek paramétere $p = 1$, tengelypontja pedig a $(0; 8)$ pont.	1 pont
A parabola fókuszpontja ezért a $(0; 7,5)$ pont.	1 pont
A kör középpontja a $C(0; 3)$ pont.	1 pont
b)	
$(2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 4 = 16$, valamint $(2\sqrt{2})^2 + (4 - 3)^2 = 9$ is igaz (ezért Q valóban pontja a parabolának és a körnek is).	2 pont
A kör $Q(2\sqrt{2}; 4)$ pontbeli érintőegyenese merőleges a C és Q pontokon átmenő egyenesre, melynek meredeksége $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, így az érintőegyenest meredeksége $-2\sqrt{2}$	1 pont
Az érintő egyenlete: $y - 4 = -2\sqrt{2}(x - 2\sqrt{2})$ Rendezve: $y = -2\sqrt{2}x + 12$	1 pont
Az érintő egyenletéből y -t kifejezve és beírva a parabola egyenletébe: $x^2 + 24 - 4\sqrt{2}x = 16$	1 pont
Rendezve $x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0$, azaz $(x - 2\sqrt{2})^2 = 0$	1 pont
Ennek az egyenletnek egy megoldása van ($x = 2\sqrt{2}$), ezért a kör érintőjének egy közös pontja van a parabolával (és nem párhuzamos az y tengellyel), tehát érinti a parabolát is.	1 pont

223

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13 - c$	2 pont
Ha $c \leq 12$, akkor $13 - c > 0$, és így az egyenlet egy $((-2; 3)$ középpontú, $13 - c$ sugarú) kör egyenlete.	1 pont
Az állítás igaz.	1 pont
c)	
Az állítás megfordítása: Ha $x^2 + 4x + y^2 - 6y + c = 0$ egy kör egyenlete, akkor $c \leq 12$.	1 pont
Egy ellenpélda $c = 12,75$ (ekkor a kör sugara $13 - c = 0,5$).	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

A megfordított állítás tehát hamis.	1 pont
-------------------------------------	--------

224

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A kör sugara $ \overrightarrow{CP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ egység,	1 pont
egyenlete $(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$.	1 pont
b)	
Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra,	1 pont
ezért az érintő meredeksége merőleges a CP egyenesre, melynek meredeksége $\frac{4}{3}$, így az érintő meredeksége $-\frac{3}{4}$.	1 pont
egyenlete $y - 2 = -\frac{3}{4} \cdot (x - (-3))$, tehát $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$	1 pont
c)	
A CP egyenes meredeksége $\frac{4}{3}$,	1 pont
egyenlete $y - 2 = \frac{4}{3} \cdot (x - (-3))$, tehát $y = \frac{4}{3}x + 6$	1 pont
(Az $y = 0$, majd $x = 0$ helyettesítésekkel kapjuk, hogy) az egyenes az x tengelyt a $(-4,5; 0)$, az y tengelyt pedig a $(0; 6)$ pontban metszi.	1 pont
A Pitagorasz-tétellel adódik, hogy a derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{4,5^2 + 6^2} = 7,5$ egység hosszú.	1 pont
A derékszögű háromszög körülírt körének sugara az átfogó fele,	1 pont
tehát 3,75 egység hosszú.	1 pont

211

[Vissza a feladathoz.](#)

(Azt kell belátni, hogy a pontok koordinátái igazgá teszik a görbe egyenletét.) Az origó esetében: $0,25 \cdot 0 \cdot (0 - 5)^2 = 0$ igaz,	1 pont
az $(5; 0)$ pont esetében: $0,25 \cdot 5 \cdot (5 - 5)^2 = 0$ igaz. (Tehát mindkét pont valóban rajta van a görbén.)	1 pont

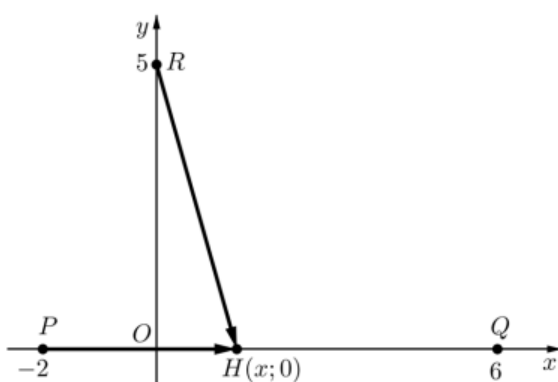
a)	
A parabola $y = \frac{x^2}{4}$ alakú egyenletéből adódik, hogy paramétere $p = 2$.	1 pont
Mivel a parabola tengelypontja az origó, $\frac{p}{2} = 1$ (és a parabola „fölfelé nyitott”), ezért a fókuszpont valóban $F(0; 1)$.	2 pont
b)	
A PF szakasz felezőmerőlegese metszi ki a g egyenesből a kör középpontját.	1 pont
A felezőmerőleges az x tengely,	1 pont
tehát a kör középpontja a $K(5; 0)$ pont.	1 pont
A kör sugara $(\sqrt{5^2 + 1^2} =) \sqrt{26}$	1 pont
A kör egyenlete $(x - 5)^2 + y^2 = 26$	1 pont
c)	
Az e érintő egyenlete írható $x - y = c$ alakban is.	1 pont
Az e pontosan akkor érinti a megadott parabolát, ha az alábbi egyenletrendszernek egy megoldása van: $x^2 - 4y = 0$ $x - y = c$	1 pont
A második egyenletből $y = x - c$, amit az első egyenletbe helyettesítve: $x^2 - 4x + c = 0$	1 pont
(Egy megoldás van, ha a diszkrimináns 0): $16 - 16c = 0$, amiből $c = 1$.	1 pont
Az érintő egyenlete: $x - y = 1$.	1 pont

a)	
Az egyenes 4 abszcisszájú pontja $(4; 3)$.	1 pont
Az R függőleges távolsága $3 - 2 = 1$,	1 pont
az S függőleges távolsága $5 - 3 = 2$.	1 pont

b)	
Az A pontnak az $y = mx$ egyenestől mért függőleges távolsága az $(1; 3)$ és az $(1; m)$ pontok távolsága. Ugyanígy a B pont függőleges távolsága a $(3; 5)$ és a $(3; 3m)$, a C ponté pedig a $(4; 4)$ és a $(4; 4m)$ pontok távolsága.	1 pont
Tehát az alábbi összeg minimumát keressük: $(m - 3)^2 + (3m - 5)^2 + (4m - 4)^2 =$	2 pont
$= 26m^2 - 68m + 50$	1 pont
Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú f függvénynek minimuma van, ha $a > 0$, és ezt a minimumot $x = -\frac{b}{2a}$-nál veszi fel.	1 pont
A $26m^2 - 68m + 50$ kifejezés tehát $m = \frac{68}{52} = \frac{17}{13}$-nál lesz minimális. (A keresett egyenes egyenlete $y = \frac{17}{13}x$.)	1 pont

201

[Vissza a feladathoz.](#)

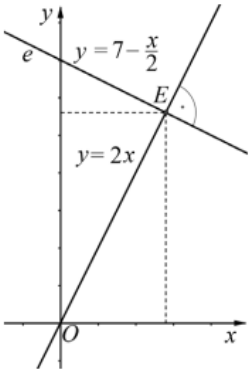
b)	
$\overrightarrow{PH} = (0,2; 0), \overrightarrow{RH} = (-1,8; -5)$	1 pont
$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{RH} = 0,2 \cdot (-1,8) + 0 \cdot (-5) = -0,36$	1 pont
c)	
 Legyen H az $(x; 0)$ pont (ahol $-2 \leq x \leq 6$).	1 pont
Ekkor $\overrightarrow{PH} = (x; 0) - (-2; 0) = (x + 2; 0)$ és $\overrightarrow{RH} = (x; 0) - (0; 5) = (x; -5)$	1 pont
$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{RH} = (x + 2)x + 0 \cdot (-5) = x(x + 2)$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

$x(x+2) = (x+1)^2 - 1$, ezért az $f: x \mapsto x(x+2)$, $-2 \leq x \leq 6$ függvénynek minimuma van -1 -nél,	2 pont
(f a $[-2; -1]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, a $[-1; 6]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, $f(-2) = 0$ és $f(6) = 48 > 0$ ezért) a maximumát 6 -nál veszi fel.	1 pont
A minimális skaláris szorzat a $H_1(-1; 0)$ ponthoz tartozik, a maximális pedig a $H_2 = Q(6; 0)$ ponthoz.	1 pont

202

[Vissza a feladathoz.](#)

 (Az e nem megy át az origón.) A négyzet másik átlóegyeneseinek meredeksége 2; ez az egyenes átmegy az origón, így egyenlete $y = 2x$.	1 pont
A négyzet E középpontja az átlóegyeneseinek metszéspontja, ennek koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja. $y = 7 - \frac{1}{2}x$ $y = 2x$	1 pont
(Behelyettesítő módszerrel dolgozva:) $2x = 7 - \frac{1}{2}x, \quad x = \frac{14}{5} = 2,8, \quad y = 2 \cdot 2,8 = 5,6$ Tehát $E(2,8; 5,6)$.	2 pont
Az origó és E távolsága: $OE = \sqrt{2,8^2 + 5,6^2} = \sqrt{39,2}$	1 pont
A négyzet területe $\frac{2OE \cdot 2OE}{2} =$	1 pont
78,4 (területegység)	1 pont