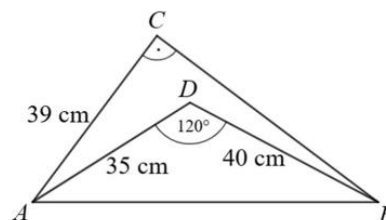


Síkgeometria feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámára kattintva találod meg.

261 | 2026. május 4./a, b, c, d

Az ábrán látható ABC derékszögű háromszög egy belső D pontjából az AB átfogó 120° -os szög alatt látszik. $AD = 35$ cm, $BD = 40$ cm és $AC = 39$ cm hosszú.



- a) Igazolja, hogy az AB átfogó hossza 65 cm!

[2 pont]

- b) Határozza meg az $ADBC$ konkáv négyszög területét!

[5 pont]

A húrnégyszögek területe kiszámítható a $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ képlettel, ahol a, b, c és d a négyszög oldalainak a hosszát jelöli, s pedig a négyszög kerületének a fele. Vannak olyan négyszögek, amelyek érintőnégyszögek és húrnégyszögek is egyben. Ezeket bicentrikus négyszögeknek nevezzük.

- c) Igazolja (a húrnégyszögek területképletének felhasználásával), hogy a bicentrikus négyszögek területe kiszámítható a $T = \sqrt{abcd}$ képlettel!

[5 pont]

Az $EFGH$ bicentrikus négyszög három ismert oldalának hossza $EF = 21$ cm, $FG = 56$ cm és $GH = 42$ cm.

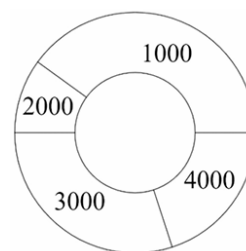
- d) Határozza meg a négyszög területét!

[2 pont]

262 | 2026. május 8./a

Az ábrán látható körgyűrű alakú szerencsekerék egyszeri megforgatásával 1000, 2000, 3000 vagy 4000 Ft-ot lehet nyerni. A szerencsekerék külső átmérőjének hossza 1 méter, a körgyűrű 20 cm széles.

Mekkora a 2000 Ft-os nyereményt tartalmazó, 36° -os középponti szögű körgyűrűcikk területe?



[3 pont]

263 | 2026. május 8./a

Egy n oldalú szabályos sokszög belső szögeinek összege 20-szor akkora, mint az 5-tel kisebb oldalszámú szabályos sokszög egy külső szöge. Határozza meg n értékét!

[5 pont]

264 | 2026. május idegen nyelvi 2./c

A teherautó téglatest alakú rakodóterének a szélessége 2,4 méter, a magassága 3,2 méter, a testátlója pedig 10,4 méter hosszú. A rakodóter négy oldallapja és a teteje ponnyával van fedve.

Mekkora a ponnya területe?

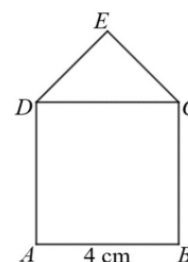
[4 pont]

265 | 2026. május idegen nyelvi 9./a

Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 cm hosszúak. A négyzet CD oldalára az ábrán látható módon a CED egyenlőszárú derékszögű háromszöget rajzoljuk úgy, hogy a négyzet oldala a háromszög átfogója legyen.

Határozza meg az $ABCD$ négyzet középpontjának és a CED háromszög súlypontjának a távolságát!

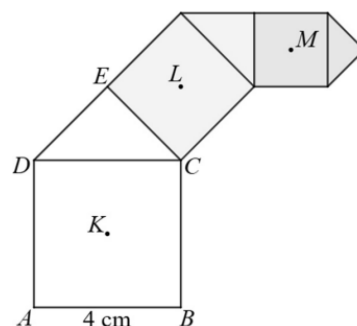
[2 pont]

**266 | 2026. május idegen nyelvi 9./b, c, d**

A négyzet és a háromszög egyesítésével létrejött $ABCED$ ötszöget házikónak nevezzük. Az ötszög CE oldalára egy újabb, az eredetihez hasonló házikót rajzolunk, és annak a tetejére ismét egy hasonló házikót az ábra szerint. A három négyzet középpontját jelölje rendre K , L és M .

- b) Igazolja, hogy két egymást követő házikó hasonlóságának aránya $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

[2 pont]



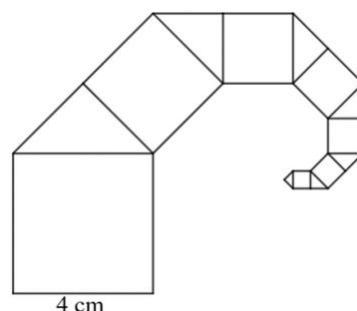
- c) Számítsa ki a KLM háromszög területének pontos értékét!

[7 pont]

A fenti eljárást folytatva, n darab házikót egymáshoz illesztve egy házrendszert kapunk. Az ábrán az $n = 7$ eset látható.

- d) Határozza meg az n házikóból álló házrendszer területének határértékét, ha $n \rightarrow \infty$.

[5 pont]

**251 | 2025. május 3./a**

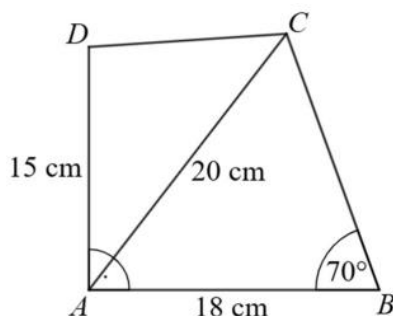
Az $\{a_n\}$ sorozat tagjaira $n \geq 2$ esetén az $a_n = a_{n-1} + n$ összefüggés teljesül. Egy négyszög belső szögei (fokban mérve) a_1, a_2, a_3 és a_4 .

Határozza meg a négyszög belső szögeinek nagyságát!

[5 pont]

252 | 2025. május 3./b

Az $ABCD$ négyszög oldalai, átlói és szögei közül ismertek a következők: $AB = 18\text{ cm}$, $AD = 15\text{ cm}$, $AC = 20\text{ cm}$, $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle ABC = 70^\circ$.

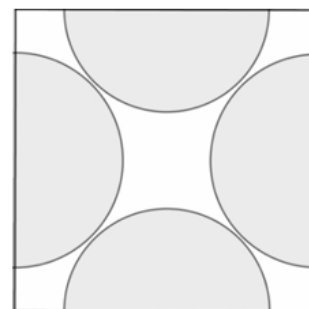


Határozza meg a négyszög BC és CD oldalának hosszát!

[7 pont]

253 | 2025. május idegen nyelvi 3./c

Péter takarékoskodik az energiával, ezért egy $46\text{ cm} \times 46\text{ cm}$ -es tepsiben egyszerre szeretne megsütni két darab 32 cm átmérőjű pizzát. Mivel egészben nem férnek el egymás mellett, ezért Péter félbevágja a pizzákat, és megpróbálja elhelyezni a tepsiben az ábra szerinti elrendezésben. (A fél pizzák középpontja egybeesik a tepsi egy-egy oldalának felezőpontjával, és a fél pizzák között nem lehet átfedés.)



Belefér-e így a tepsibe a két pizza?

[4 pont]

254 | 2025. május idegen nyelvi 6./a, b

Az $ABCD$ húrnégyszögben a BD átló hossza 20 cm , $\angle ABD = \angle BCA = 35^\circ$, $\angle DAC = 48^\circ$.

a) Igazolja, hogy $\angle BDA = 35^\circ$ és $\angle ACD = 35^\circ$.

[3 pont]

b) Számítsa ki az $ABCD$ húrnégyszög területét!

[9 pont]

255 | 2025. május idegen nyelvi 6./c

Az EFG háromszögről a következőket tudjuk: $EF = 110\text{ cm}$, $FG = 50\text{ cm}$, $EG = 104\text{ cm}$.

Számítsa ki, hogy a háromszög F csúcsából induló belső szögfelező mekkora részekre osztja az EG oldalt!

[4 pont]

256 | 2025. október 3./b, c

Az alábbi állításban a, b és c pozitív valós számokat jelölnek: „Ha van olyan háromszög, amelynek oldalai (centiméterben mérve) a, b, c hosszúak, akkor $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 > 0$.”

b) Bizonyítsa be, hogy az állítás igaz!

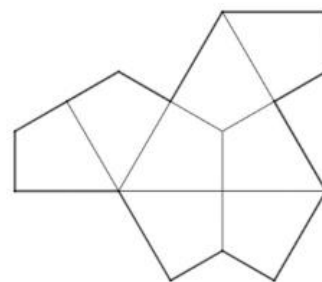
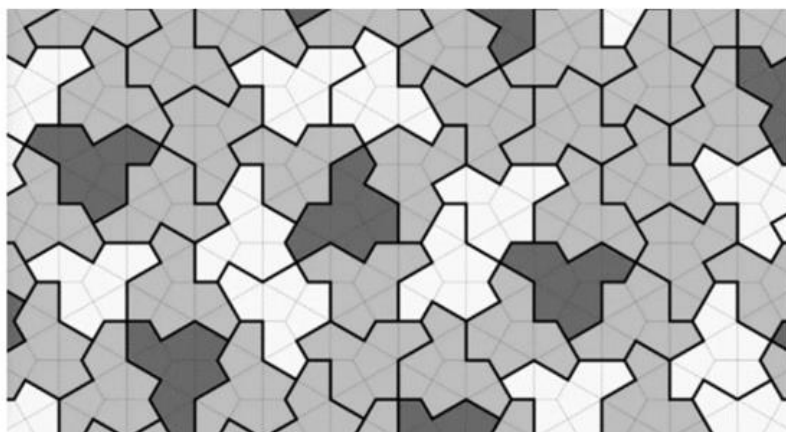
[4 pont]

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és adja meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

[3 pont]

257 | 2025. október 6./a, b

Az angol David Smith (egy 64 éves nyugalmazott nyomdagépszerelő) 2023-ban fedezte fel az első olyan, egyetlen elemből álló nemperiodikus csempézést, amellyel az ábrán látható módon fedhető le a sík. 1 Az általa megtalált 13 oldalú síkidom 8 darab egybevágó deltoidból állítható össze, és Smith a kalap nevet adta neki.



a) Igazolja, hogy egy-egy deltoid szögei rendre 60° , 90° , 120° és 90° .

[3 pont]

b) Számítsa ki egy kalap területét, ha területe $\sqrt{1728}$ területegység! Válaszát közelítő értékek használata nélkül adja meg!

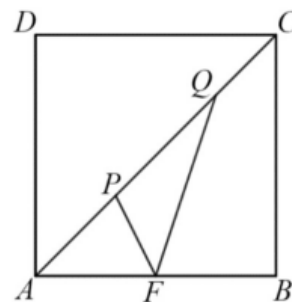
[7 pont]

241 | 2024. május 4./a, b, c

Az ábrán látható $ABCD$ négyzet AC átlóját a P és a Q pont három szakaszra bontja, mégpedig úgy, hogy $AP:PQ:QC = 4:5:3$ teljesül. Jelölje F a négyzet AB oldalának felezőpontját.

a) Határozza meg, hogy az AFQ háromszög területe hányadrésze az $ABCD$ négyzet területének!

[4 pont]



A négyzet oldala 24 egység hosszú.

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

b) Igazolja, hogy az FPQ háromszögben $FP = 45$ és $QF = 6\sqrt{10}$.

[6 pont]

c) Igazolja, hogy az AFQ háromszög és az FPQ háromszög hasonló!

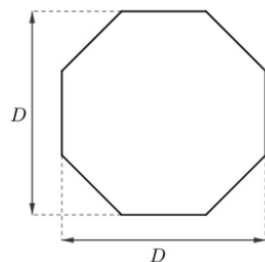
[4 pont]

242 | 2024. május idegen nyelvi 4./a

Az utakon látható STOP tábla méretét egy miniszteri rendelet pontosan szabályozza: a tábla alakja egy olyan szabályos nyolcszög, amelynek az ábrán D -vel jelölt méretei egyaránt 600 mm-esek (lakott területen belüli táblák esetén).

Mekkora a szabályos nyolcszög egy oldalának hossza?

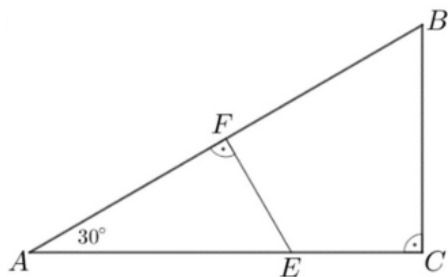
[6 pont]



243 | 2024. május idegen nyelvi 6./a, b, c

Az ABC derékszögű háromszög A csúcsánál fekvő szöge 30° -os

- a) A háromszög AB átfogójának F felezőpontjában merőleget állítunk az átfogóra. Ez a merőleges az AC befogót az E pontban metszi. Milyen arányban osztja két részre az E pont az AC befogót?



[5 pont]

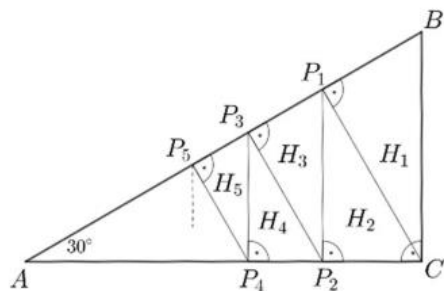
A háromszögből az átfogójához tartozó CP_1 magassága mentén levágjuk a H_1 -gyel jelölt háromszöget. Az így megmaradó ACP_1 derékszögű háromszögben végrehajtjuk ugyanezt a lépést: a H_2 háromszöget vágjuk le a háromszög átfogójához tartozó P_1P_2 magassága mentén, és így tovább (lásd az ábrán).

- b) Ha ezt az eljárást 13-szor hajtjuk végre, akkor a 13 háromszög levágása után megmaradó háromszög területe hány százaléka az ABC háromszög területének?

[6 pont]

- c) Mekkora a végtelen sok szakaszból álló $CP_1P_2P_3P_4 \dots$ töröttvonal hosszának pontos értéke, ha $CP_1 = 2 - \sqrt{3}$?

[5 pont]



244 | 2024. május idegen nyelvi 8./a, b, c, d

Egy háromszög oldalainak hossza $p^2 + q^2$, $p^2 - q^2$, illetve $2pq$, ahol p és q olyan pozitív egész számok, melyekre $p > q$ teljesül.

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

a) Igazolja, hogy a három oldalhossz közül $p^2 + q^2$ a legnagyobb!

[4 pont]

b) Igazolja, hogy a háromszög derékszögű!

[4 pont]

c) Igazolja, hogy a háromszög területe $p^3q - q^3p$!

[2 pont]

d) Jelölje a háromszögbe írt kör sugarának hosszát r . Igazolja, hogy r értéke egész szám!

[6 pont]

245 | 2024. október 4./a, b, c

Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek a , b és c oldalaira teljesül, hogy (centiméterben mérve) $b = a + 4$ és $c = a + 8$.

a) Adott egy ilyen tulajdonságú háromszög, melynek legnagyobb szöge 120° . Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

[6 pont]

b) Adott egy ilyen tulajdonságú háromszög, melynek leghosszabb oldala 24 cm hosszú. Határozza meg a háromszög területét!

[5 pont]

c) Igazolja, hogy minden ilyen tulajdonságú háromszög kerülete nagyobb, mint 24 cm!

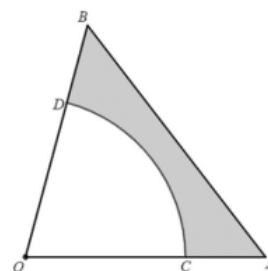
[4 pont]

246 | 2024. október 6./a

Az OAB egyenlőszárú háromszög OA és OB szárai 12 cm hosszúak, AOB szöge 75° . Az OA szakasz C pontját és az OB szakasz D pontját (az ábra szerint) egy O középpontú, 8 cm sugarú körív köti össze.

Határozza meg a szürkére színezett tartomány területét és kerületét!

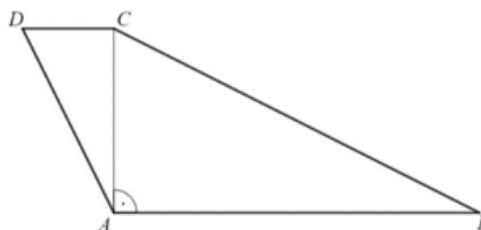
[8 pont]



231 | 2023. május 3./a, c

Az ábrán látható trapéz alakú kert alapjainak hossza: $AB = 36$ m, $CD = 8$ m. A 11 méter hosszú AC átló merőleges a trapéz alapjaira.

a) Az ábrán látható trapéz alakú kert alapjainak hossza: $AB = 36$ m, $CD = 8$ m. A 11 méter hosszú AC átló merőleges a trapéz alapjaira.



[4 pont]

Az e egyenes párhuzamos a fenti $ABCD$ trapéz alapjaival, és az AD szarat az E pontban, a BC szarat pedig az F pontban metszi. Az AC átló felezi az EF szakaszt.

c) Az A ponttól mekkora távolságra metszi az e egyenes az AC átlót?

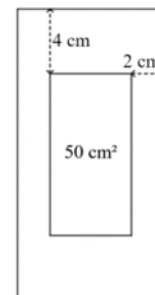
[6 pont]

232 | 2023. május 6./c

Egy téglalap alakú kartonlap oldalhosszait úgy szeretnénk megválasztani, hogy alul és felül 4-4 cm-es, jobb és bal oldalon 2-2 cm-es margót hagyva a lap közepén megmaradó téglalap alakú terület 50 cm^2 nagyságú legyen.

Mekkorának válasszuk a kartonlap oldalainak hosszát, hogy a területe a lehető legkisebb legyen?

[8 pont]



233 | 2023. május idegen nyelvi 3./a

Egy vízszintesen futó egyenes alagút függőleges keresztmetszete egy olyan 8,1 m magas körszelet, amely egy 6 m sugarú körből származik. Az alagút hossza 340 m. (A kép illusztráció.)

Mutassa meg, hogy a körszelet körívéhez (egész fokra kerekítve) 221° -os középponti szög tartozik a körben!

[4 pont]



234 | 2023. május idegen nyelvi 5./a, b, c

Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 15$, $BC = 10$. Az ABC szöget a DB átló két részre osztja: $\angle ABD = 20^\circ$, $\angle DBC = 40^\circ$.

a) Igazolja, hogy az AC átló hossza pontosan $5 \cdot \sqrt{7}$!

[3 pont]

b) Igazolja, hogy az ACD háromszög szögei 20° , 40° és 120° !

[2 pont]

c) Számítsa ki az $ABCD$ négyszög területét!

[4 pont]

235 | 2023. május idegen nyelvi 5./d

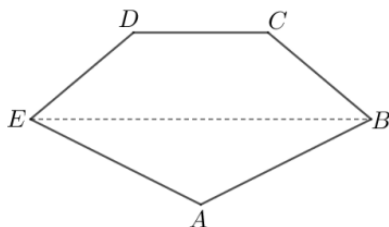
A $KLMN$ deltoidban a K és az M csúcsnál derékszög van, a KM átló hossza 9,6 cm. Az LN szimmetriaátlót az átlók metszéspontja két olyan szakaszra osztja, amelyek hosszának különbsége 2,8 cm.

Számítsa ki a deltoid területét!

[7 pont]

236 | 2023. október 5./a, b

Az $ABCDE$ konvex ötszögben $AB = AE = 20$ cm és $BC = CD = DE$. A $BCDE$ négyszög egy húrtrapéz, amelynek a B -nél fekvő belső szöge 40° -os. Az A csúcs és az EB átló távolsága 10 cm.



a) Mekkora az ötszög (belső) szögei?

[4 pont]

b) Mekkora az ötszög területe?

[8 pont]

221 | 2022. május 3./b

A társasház kertje egy 15 méter hosszú, 10 méter széles téglalap alakú földterület, amely az egyik átlója mentén ketté van osztva: az egyik fele füvesítve van, a másik felén virágágyás található. A füvesített rész derékszögű csúcsában van egy öntöző, amely egy 10 méter sugarú negyedkör alakú területet locsol a kertben.

Mekkora az a füvesített terület, amelyet nem ér el az öntöző?

[8 pont]

222 | 2022. május idegen nyelvi 3./b

Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza $AC = 30$ egység és $BC = 40$ egység. Megrajzoljuk a derékszögű csúcsból induló magasságvonalat, szögfelezőt és súlyvonalat. Ezek metszéspontját az átfogóval jelölje rendre P , Q és R .

Írja fel egész számokkal az $AP: PQ: QR: RB$ arányt! Pontos értékekkel számoljon!

[8 pont]

223 | 2022. május idegen nyelvi 5./a, b

Egy háromszög oldalai a , $a + 1$ és $a + 2$ egység hosszúak.

a) Igazolja, hogy ha a háromszög legnagyobb szöge γ , akkor $\cos \gamma = \frac{a-3}{2a}$.

[6 pont]

b) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát, ha a háromszög legnagyobb szöge 120 fokos!

[3 pont]

224 | 2022. október 6./a

Egy ingatlanhirdetésben sík területen fekvő legelőt kínálnak eladásra. A legelő alakja konvex négyszög, ennek csúcsait jelölje A, B, C és D . A négyszög három oldala $AB = 126$ m, $BC = 65$ m, $CD = 80$ m, két szöge $\angle ABC = 122,5^\circ$ és $\angle ADC = 90^\circ$. A legelőt 0,9 hektár területűnek hirdeti az eladó.

Hány százalékkal nagyobb a legelő valódi területe a meghirdetetténél? ($1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$)

[6 pont]

211 | 2021. május 2./a

Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = 50$ m, $BC = 60$ m, $CD = 70$ m, továbbá $\angle BAD = \angle BCD = 100,3^\circ$.

Számítsa ki a négyszög területét!

[9 pont]

212 | 2021. május idegen nyelvi 2./a

A Budavári Siklót 1870-ben építették. Korabeli források szerint a sikló (hegyoldali vasútvonal) kivitelezője, Wohlfarth Henrik a pálya eredeti tervekben szereplő kb. 33 fokos hajlásszögét – ma már nem tudni, milyen okból – 30 fokra csökkentette. A kivitelezés során a felső állomás helye változatlan maradt, az alsó állomás azonban a tervekhez képest 6 méterrel feljebb került. (Az alsó állomás tervezett és valóságos helyét összekötő képzeletbeli egyenes merőleges a földfelszínre.)

Határozza meg a sikló pályájának hosszát és a pálya szintemelkedését!

[7 pont]



213 | 2021. október 4./b

A konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai A, B és C , akkor $AB = AC = 130$ méter, és $BC = 100$ méter. A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes CD kerítés úgy, hogy a BCD háromszög alakú rész területe 2000 m^2 . (D az AB oldalon van.)

Milyen hosszú a CD kerítés?

[7 pont]

214 | 2021. október 6./a

Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették.

Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg?

[9 pont]

201 | 2020. május 7./a

Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 20$, $BC = 18$, $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle CAD = 50^\circ$.

Milyen hosszú a CD oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?

[7 pont]

202 | 2020. május idegen nyelvi 1./a, b

Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 17$ cm és $AD = 8$ cm.

a) Mekkora területű részt fed le a téglalaphoz az A középpontú, 17 cm sugarú kör?

[7 pont]

b) Az $APCQ$ rombusz P csúcsa a téglalap AB oldalának belső pontja, Q csúcsa pedig a CD oldal belső pontja. Számítsa ki a rombusz területét!

[5 pont]

203 | 2020. május idegen nyelvi 6./a

Egy szabályos tízszög legrövidebb átlója 6 cm hosszú.

Határozza meg a tízszög oldalának hosszát!

[4 pont]

204 | 2020. május idegen nyelvi 9./a

Az 1917-ben gyártott és nosztalgiajárműként megőrzött 109.109 sorozatszámú gőzmozdony legnagyobb, úgynevezett hajtókerekének átmérője 1740 mm. A mozdony maximális engedélyezett sebessége 90 km/h.

Mekkora a hajtókerek percenkénti fordulatszáma 90 km/h sebességnél?

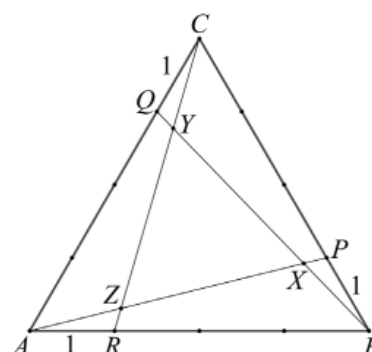
[4 pont]

205 | 2020. október 9./b

Jelölje a 4 egység oldalú ABC szabályos háromszög BC oldalának B -hez közelebbi negyedelőpontját P , a CA oldal C -hez közelebbi negyedelőpontját Q , az AB oldal A -hoz közelebbi negyedelőpontját pedig R . Jelölje továbbá AP és BQ szakaszok metszéspontját X , BQ és CR szakaszok metszéspontját Y , végül CR és AP szakaszok metszéspontját Z .

Határozza meg az XYZ háromszög területét!

[11 pont]



Megoldások

261

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A koszinusztételt felírva az ABD háromszög AB oldalára: $AB^2 = 35^2 + 40^2 - 2 \cdot 35 \cdot 40 \cdot \cos 120^\circ =$	1 pont
$= 4225$, amiből $AB = 65$ cm valóban.	1 pont
b)	
A Pitagorasz-tételt az ABC háromszög BC oldalára felírva: $BC = \sqrt{65^2 - 39^2}$	1 pont
$= 52$ cm.	1 pont
$T_{ABC} = \frac{39 \cdot 52}{2} = 1014 \text{ cm}^2$	1 pont
$T_{ABD} = \frac{35 \cdot 40 \cdot \sin 120^\circ}{2} \approx 606,2 \text{ cm}^2$	1 pont
$T_{ADBC} = 1014 - 606,2 = 407,8 \text{ cm}^2$	1 pont
c)	
Az érintőnégszögek szemközti oldalainak összege egyenlő, tehát (a szokásos jelöléssel) $a + c = b + d$.	1 pont
Ekkor például $s - a = \frac{a + b + c + d}{2} - a = \frac{2a + 2c}{2} - a = a + c - a = c$	2 pont
Ugyanígy $s - b = d$, $s - c = a$ és $s - d = b$.	1 pont
Tehát $T = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)} = \sqrt{cdab} = \sqrt{abcd}$ valóban.	1 pont
d)	
Mivel a négyszög érintőnégszög, ezért a negyedik oldalának hossza $HE = 21 + 42 - 56 = 7$ cm.	1 pont
A négyszög területe $\sqrt{21 \cdot 56 \cdot 42 \cdot 7} = 588 \text{ cm}^2$.	1 pont

262

[Vissza a feladathoz.](#)

A körgyűrűcikk hosszabb sugara $(100 : 2 =) 50$ cm, a rövidebb pedig $(50 - 20 =) 30$ cm.	1 pont
Így a területe $(50^2\pi - 30^2\pi) \cdot \frac{36^\circ}{360^\circ} =$	1 pont
$160\pi \approx 503 \text{ cm}^2$.	1 pont

263

[Vissza a feladathoz.](#)

A feladat szövege alapján: $(n - 2) \cdot 180 = 20 \cdot \frac{360}{n-5}$ (ahol $n \geq 8$).	2 pont
$0 = n^2 - 7n - 30$	1 pont
$n = -3$ nem megoldás,	1 pont
$n = 10$ oldalú a sokszög (ami megfelel a feltételeknek).	1 pont

264

[Vissza a feladathoz.](#)

A rakodótér ismeretlen oldalának hosszát (méterben) x -szel jelölve, a téglatest testátlójára vonatkozó összefüggés szerint: $2,4^2 + 3,2^2 + x^2 = 10,4^2$	2 pont
Innen $x = 9,6$ m.	1 pont
A ponyva területe: $9,6 \cdot 2,4 + 2 \cdot 9,6 \cdot 3,2 + 2 \cdot 2,4 \cdot 3,2 \approx$	1 pont
$\approx 100 \text{ m}^2$.	1 pont

265

[Vissza a feladathoz.](#)

Jelölje az $ABCD$ négyzet középpontját K . A súlypont a KE szakaszon helyezkedik el, és a háromszög E csúcsából induló súlyvonalát a csúctól távolabbi harmadolópontjában osztja két részre.	1 pont
A KE szakasz 4 cm hosszú (mert a K pont CD oldalra vonatkozó tükörképe E), amiből a súlyvonal 2 cm hosszú, így a keresett távolság $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ cm.	1 pont

266

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
----	--

Mivel a CED háromszög egyenlőszárú és derékszögű, ezért a CD átfogó a CE befogónak a $\sqrt{2}$ -szöröse.	1 pont
Tehát két egymást követő házikó hasonlóságának aránya $\frac{CE}{AB} = \frac{CE}{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ valóban	1 pont
c)	
(A második és harmadik négyzet közös csúcsát jelölje F .) A KCL és LFM háromszögek hasonlóak a házikók hasonlósága miatt (két megfelelő oldaluk aránya és az ezek által közbezárt szögük megegyezik), így hegyesszögeiket α -val, illetve β -val jelölve $\alpha + \beta = 180^\circ - 3 \cdot 45^\circ = 45^\circ$, tehát $KL\hat{M} = \alpha + \beta + 90^\circ = 135^\circ$.	2 pont
KC szakasz az $ABCD$ négyzet átlójának fele, ezért $KC = 2\sqrt{2}$ cm.	1 pont
(Az egymást követő házikók hasonlóságának aránya $\frac{1}{\sqrt{2}}$, így) $CL = FL = \left(2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$ cm, továbbá $MF = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ cm.	1 pont
Koszinusztétellel: $KL = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{20}$ cm.	1 pont
$ML = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{10}$ cm.	1 pont
A kért terület így $\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin 135^\circ}{2} = 5$ cm ² .	1 pont
d)	
Az első házikó területe $t_1 = 4 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 2}{2} = 20$ cm ² .	1 pont
Az egymást követő házikók területének aránya $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$	1 pont
A házrendszerek területei egy olyan végtelen mértani sort alkotnak, amelynek első tagja 20 cm ² , hányadosa pedig 0,5 ($0 < q < 1$ miatt ennek létezik véges határértéke). Az n házikóból álló házrendszer területe: $S_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$	1 pont

$T = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{20}{1 - 0,5} =$	1 pont
$= 40 \text{ (cm}^2\text{) a házrendszer területe.}$	1 pont

251

[Vissza a feladathoz.](#)

$a_2 = a_1 + 2$ $a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 5$ $a_4 = a_3 + 4 = a_1 + 9$	2 pont
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 + 16 = 360$	1 pont
Innen $a_1 = 86$.	1 pont
Így a négyszög belső szögei 86° , 88° , 91° és 95° (amelyek megfelelnek a feltételeknek).	1 pont

252

[Vissza a feladathoz.](#)

Az ABC háromszögben szinusztétellel: $\frac{18}{20} = \frac{\sin BCA^\circ}{\sin 70^\circ}$	1 pont
ahonnan $BCA^\circ \approx 57,75^\circ$ (tompaszög nem lehet, mert rövidebb oldallal szemben kisebb szög van).	1 pont
Így $CAB^\circ = (180^\circ - 70^\circ - 57,75^\circ) = 52,25^\circ$, és $DAC^\circ = (90^\circ - 52,25^\circ) = 37,75^\circ$.	1 pont
Az ABC háromszögben koszinusztétellel: $BC^2 = 20^2 + 18^2 - 2 \cdot 20 \cdot 18 \cdot \cos 52,25^\circ (\approx 283,2)$,	1 pont
ahonnan $BC \approx 16,83 \text{ cm}$.	1 pont
Az ACD háromszögben koszinusztétellel: $CD^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 37,75^\circ (\approx 150,6)$,	1 pont
ahonnan $CD \approx 12,27 \text{ cm}$.	1 pont

253

[Vissza a feladathoz.](#)

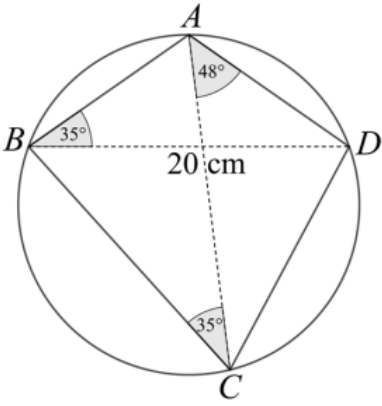
Kiszámoljuk a tepsibe a megadott módon elhelyezhető legnagyobb pizzák átmérőjét. Ebben az esetben a félkörök érintik egymást. Két érintkező félkör közép pontjának távolsága a két félkör sugarának összege.	1 pont
--	--------

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

(A félkörök sugarát r -rel jelölve:) A Pitagorasz-tétel alapján: $(2r)^2 = 23^2 + 23^2$.	1 pont
ahonnan $2r (= 23\sqrt{2}) \approx 32,5 \text{ cm}$.	1 pont
Ez nagyobb, mint 32 cm, tehát Péter fél pizzái elférnek a tepsiben.	1 pont

254

[Vissza a feladathoz.](#)

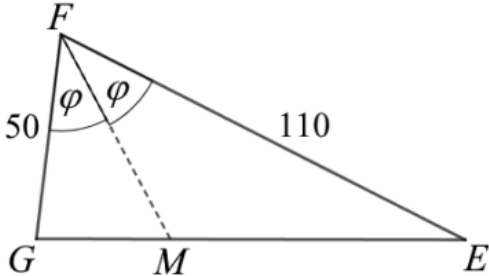
a)	
 A kerületi szögek tétele miatt	1 pont
$\angle ADB = \angle ACB = 35^\circ$ (mert mindkettő ugyanahhoz az AB ívhez tartozik),	1 pont
illetve $\angle ABD = \angle ACD = 35^\circ$ (mert mindkettő ugyanahhoz az AD ívhez tartozik).	1 pont
b)	
(Az egyenlőszárú ABD háromszög BD alapja 20 cm hosszú, ezért) $AB = AD = \frac{10}{\cos 35^\circ} \approx 12,2 \text{ cm}$	2 pont
(A kerületi szögek tétele vagy a háromszögek belső szögösszege miatt:) $\angle CAB = 62^\circ, \angle DBC = 48^\circ, \angle BDC = 62^\circ$.	2 pont
($\angle BCD = 70^\circ$, így) a BCD háromszögben szinusz-tételt alkalmazva: $\frac{BC}{20} = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 70^\circ}$	1 pont
amiből $BC \approx 18,8 \text{ cm}$.	1 pont
Koszinusz-tétellel: $CD = \sqrt{20^2 + 18,8^2 - 2 \cdot 20 \cdot 18,8 \cdot \cos 48^\circ} \approx$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

$\approx 15,8$ cm.	1 pont
A hűrnégyszög kerülete: (12,2 + 12,2 + 18,8 + 15,8 =) 59 cm.	1 pont

255

[Vissza a feladathoz.](#)

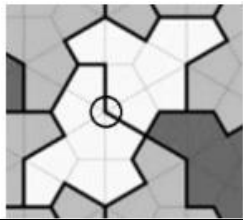
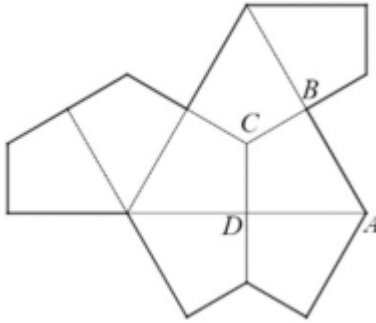
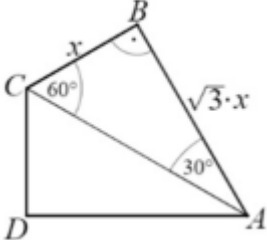
 (Jelölje az F-hez tartozó belső szögfelező és az EG oldal metszéspontját M.) A szögfelezőtétel miatt $\frac{EM}{MG} = \frac{FE}{FG}$,	1 pont
amiből (arányos osztással) $EM = \frac{104}{110 + 50} \cdot 110 = 71,5 \text{ cm}$	2 pont
Ezért $MG = (104 - 71,5 =) 32,5$ cm. (A szögfelező az EG oldalt 71,5 cm, illetve 32,5 cm hosszú szakaszokra osztja.)	1 pont

256

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2 =$	1 pont
$= (a + b + c)(a + b - c)$	1 pont
A háromszög-egyenlőtlenség miatt $a + b > c$ teljesül,	1 pont
így a szorzat mindkét tényezője pozitív, tehát az állítás valóban igaz.	1 pont
c)	
Az állítás megfordítása: „Ha (az a, b és c pozitív valós számokra teljesül, hogy) $a^2 + b^2 + 2ab - c^2 > 0$, akkor van olyan háromszög, amelynek az oldalai (cm-ben) a, b, c hosszúak.”	1 pont
Az állítás hamis.	1 pont
Egy ellenpélda (például $a = 2, b = 1, c = 1$).	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

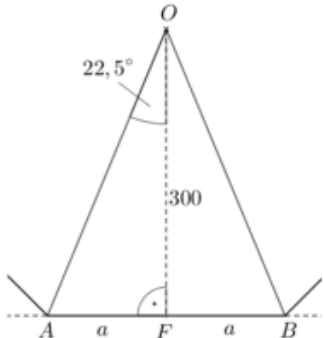
a)		
	A legkisebb szögből hat darab 360° -ot ad, így egy ilyen szög nagysága 60° .	1 pont
A deltoid B és D csúcsánál levő szögei $360^\circ : 4 = 90^\circ$ -osak.		1 pont
Ezért a deltoid C csúcsánál lévő szöge $(360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 90^\circ =) 120^\circ$ valóban.		1 pont
b)		
	A kalap kerülete 6 darab AB oldallal és 8 darab BC oldallal egyenlő hosszúságú szakaszból áll ($k = 6 \cdot AB + 8 \cdot BC$).	1 pont
Egy deltoid területe $\frac{\sqrt{1728}}{8} (= 3\sqrt{3})$.		1 pont
	Az $ABCD$ deltoidot az AC átlója két egybevágó, fél szabályos háromszögre bontja, ezért ha a BC oldal hossza x , akkor az AB oldal hossza $\sqrt{3} \cdot x$.	1 pont
A deltoid területe a fél szabályos háromszög területének kétszerese, ezért $3\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{x \cdot \sqrt{3} \cdot x}{2}$,		2 pont
amiből $x^2 = 3$, azaz $x = \sqrt{3}$.		1 pont
Tehát a kalap kerülete $6 \cdot \sqrt{3} \cdot x + 8 \cdot x = 18 + 8\sqrt{3}$.		1 pont

a)	
Az ABC háromszög területe a négyzet területének fele.	1 pont

Az AFC háromszög területe fele az ABC háromszög területének (C -hez tartozó magasságuk közös, alapjaik aránya 1: 2).	1 pont
Az AFQ háromszög területe háromnegyede az AFC háromszög területének (F -ből induló magasságuk közös, alapjaik aránya 9: 12 = 3: 4).	1 pont
Az AFQ háromszög területe így $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ része az $ABCD$ négyzet területének.	1 pont
b)	
$AF = 12, AC = 2\sqrt{2}, AP = 8\sqrt{2}, AQ = 18\sqrt{2}$ A PAF szög nagysága 45° .	2 pont
A PAF háromszögben koszinusztétellel: $FP^2 = (8\sqrt{2})^2 + 12^2 - 2 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \cos 45^\circ = 80$	1 pont
Tehát $FP = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ valóban.	1 pont
Az AFQ háromszögben koszinusztétellel: $QF^2 = (18\sqrt{2})^2 + 12^2 - 2 \cdot 18\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \cos 45^\circ = 360$	1 pont
Tehát $QF = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$ valóban.	1 pont
c)	
A két háromszög Q -nál levő szöge közös.	1 pont
A szöget közrefogó oldalaik aránya: $\frac{AQ}{QF} = \frac{18\sqrt{2}}{6\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, illetve $\frac{QF}{PQ} = \frac{6\sqrt{10}}{10\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.	2 pont
Mivel a két háromszögben egy szög és a szöget közrefogó két oldal aránya megegyezik, ezért a két háromszög valóban hasonló.	1 pont

242

[Vissza a feladathoz.](#)

	2 pont
---	--------

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

(Az ábra jelöléseit használva) az AFO derékszögű háromszögben (felhasználva, hogy OF szögfelező) $tg 22,5^\circ = \frac{a}{300}$	2 pont
Ebből $a \approx 124,26$ (mm).	1 pont
A szabályos nyolcszög oldala $2a \approx 248,5$ mm hosszú.	1 pont

243

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
Az AF szakasz hosszát jelölje x , $AB = 2x$, így az ABC háromszögben $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{2x}$	1 pont
ahonnan $AC = \sqrt{3}x$.	1 pont
Az AFE háromszögben $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AF}{AE} = \frac{x}{AE}$	1 pont
ahonnan $AE = \frac{2}{\sqrt{3}}x$	1 pont
$AE : AC = \frac{2}{\sqrt{3}}x : \sqrt{3}x = 2 : 3$, ezért $AE : EC = 2 : 1$	1 pont
b)	
(A megoldás során felhasználjuk azt az ismert tényt, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 30° -os, akkor az ezzel szemközti befogó fele a háromszög átfogójának.) H_1 háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz (mert szögeik megegyeznek), a hasonlóságuk aránya $1:2$ (hiszen H_1 átfogója megegyezik ABC háromszög rövidebb befogójával, amely fele az átfogójának),	1 pont
ezért a H_1 háromszög területe az eredeti háromszög területének negyedrésze.	1 pont
A H_1 háromszög levágásával tehát olyan háromszög marad meg, amelynek a területe a kiindulási háromszög területének a $3/4$ része ($0,75$ -szoros).	1 pont
Ez mindegyik további lépésben ismétlődik, minden esetben az előző háromszög területének a $0,75$ -szorosa marad meg a levágás után.	1 pont
A 13 levágás után megmaradó háromszög területe ezért az ABC háromszög területének $0,75^{13} \approx 0,024$ - szerese,	1 pont
azaz kb. $2,4\%$ -a.	1 pont
c)	

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

$\frac{P_1 P_2}{CP_1} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1 pont
(Hasonlósági megfontolások miatt) ez lesz az aránya a töröttvonal bármely két szomszédos szakasza hosszának.	1 pont
A töröttvonal egymást követő szakaszainak hossza tehát egy olyan mértani sorozatot alkot, melynek első tagja $CP_1 = 2 - \sqrt{3}$, hányadosa pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	1 pont
A végtelen töröttvonal hossza a (mértani sorozatból képzett) végtelen mértani sor összege (ez létezik, mert $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ teljesül), azaz $S = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} =$	1 pont
$= \frac{2 - \sqrt{3}}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = 2$	1 pont
A szabályos nyolcszög oldala $2a \approx 248,5$ mm hosszú.	1 pont

244

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
$p^2 + q^2 > p^2 - q^2$ nyilvánvalóan teljesül.	1 pont
Meg kell mutatni, hogy $p^2 + q^2 > 2pq$.	1 pont
Rendezve: $p^2 - 2pq + q^2 > 0$, vagyis $(p - q)^2 > 0$,	1 pont
ami valóban igaz, mert $p \neq q$. (Ekvivalens átalakításokat végeztünk.)	1 pont
b)	
A két rövidebb oldal négyzetének összege $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4$.	2 pont
Ez $p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = (p^2 + q^2)^2$ miatt a harmadik oldal négyzetével egyenlő.	1 pont
A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög valóban derékszögű.	1 pont
c)	

A (derékszögű) háromszög területe a két befogó (a két rövidebb oldal) szorzatának fele: $T = \frac{(p^2 - q^2) \cdot 2pq}{2} =$	1 pont
$= p^3q - q^3p$ valóban.	1 pont
d)	
A $T = rs$ területképletet alkalmazva (T a háromszög területe, s a háromszög félkerülete, r pedig a beírt kör sugara):	1 pont
$s = \frac{(p^2 + q^2) + (p^2 - q^2) + 2pq}{2} = p^2 + pq$	1 pont
$r = \frac{T}{s} = \frac{p^3q - q^3p}{p^2 + pq} = \frac{pq(p^2 - q^2)}{p(p + q)} =$	1 pont
$= \frac{pq(p + q)(p - q)}{p(p + q)} = q(p - q)$	2 pont
ami valóban egész szám.	1 pont

245

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A háromszög 120° -os szöge a legnagyobb szög, így ez a leghosszabb (c) oldallal szemközi szög.	1 pont
Felírva a koszinusztételt a c oldalra: $(a + 8)^2 = a^2 + (a + 4)^2 - 2a(a + 4) \cdot \cos 120^\circ$	1 pont
Rendezve: $0 = 2a^2 - 4a - 48$	2 pont
Az egyenlet pozitív gyöke $a = 6$ (a negatív gyök -4 , ami nem lehetséges).	1 pont
A háromszög oldalai: 6 (cm), 10 (cm) és 14 (cm) (és ekkor teljesül a háromszög-egyenlőtlenség).	1 pont
b)	
A másik két oldal 16 cm és 20 cm hosszú.	1 pont
A 16 cm-es oldallal szemközi szöget α -val jelölve, a koszinusztétellel: $\cos \alpha = \frac{24^2 + 20^2 - 16^2}{2 \cdot 24 \cdot 20} = 0,75$	1 pont

Innen $\alpha \approx 41,4^\circ$.	1 pont
A háromszög területe: $T = \frac{24 \cdot 20 \cdot \sin 41,4^\circ}{2} \approx$	1 pont
$\approx 158,7 \text{ cm}^2$.	1 pont
c)	
Mivel c a leghosszabb oldal, ezért (a háromszögegyenlőtlenség miatt) pontosan akkor létezik a háromszög, ha $a + b > c$.	1 pont
$a + (a + 4) > a + 8$,	1 pont
ahonnan $a > 4$.	1 pont
Így a háromszög kerülete valóban nagyobb, mint $(4 + 8 + 12 =) 24 \text{ cm}$.	1 pont

246

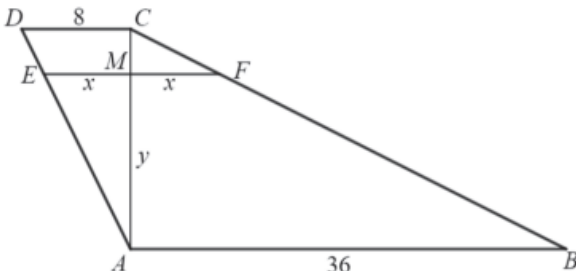
[Vissza a feladathoz.](#)

Az OAB háromszög területe $\frac{12^2 \cdot \sin 75^\circ}{2} \approx 69,5 \text{ cm}^2$.	1 pont
Az OCD körcikk területe: $\frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 8^2 \cdot \pi \approx 41,9 \text{ cm}^2$.	1 pont
A szürkére színezett tartomány területe $(69,5 - 41,9 =) 27,6 \text{ cm}^2$.	1 pont
Az OAB háromszögben koszinusztétellel: $AB = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 75^\circ} \approx$	1 pont
$\approx 14,6 \text{ cm}$.	1 pont
A CD körív hossza $\frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 8 \cdot \pi \approx 10,5 \text{ cm}$.	1 pont
$CA = DB = 12 - 8 = 4 \text{ cm}$	1 pont
A szürkére színezett tartomány kerülete $(14,6 + 4 + 10,5 + 4 =) 33,1 \text{ cm}$.	1 pont

231

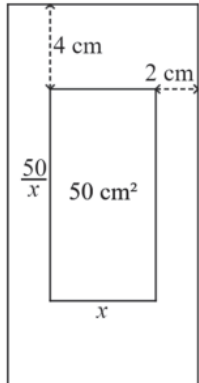
[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A trapéz szárainak hossza: $BC = \sqrt{36^2 + 11^2} \approx 37,6 \text{ m}$, $AD = \sqrt{8^2 + 11^2} \approx 13,6 \text{ m}$	2 pont
A kert kerülete $36 + 37,6 + 8 + 13,6 = 95,2 \text{ m}$.	1 pont

A kert területe $\frac{36+8}{2} \cdot 11 = 242 \text{ m}^2$	1 pont
c)	
 (Az e egyenes az AC átlót az M pontban metszi. A feltétel szerint $EM = MF = x$. Keressük az $AM = y$ távolságot.)	1 pont
Az AME háromszög hasonló az ACD háromszöghöz (mert szögeik egyenlők), így $\frac{x}{y} = \frac{8}{11}$. A CMF háromszög hasonló a CAB háromszöghöz (mert szögeik egyenlők), így $\frac{x}{11-y} = \frac{36}{11}$	2 pont
Behelyettesítve az első aránypárból kapott $x = \frac{8y}{11}$ kifejezést: $\frac{\frac{8y}{11}}{11-y} = \frac{36}{11}$	1 pont
$8y = 36(11 - y)$	1 pont
$y = 9$, tehát a keresett távolság 9 (méter).	1 pont
Ekkor a zabhegyezési idő kb. $\left(\frac{3000}{60} =\right) 50$ óra.	1 pont

232

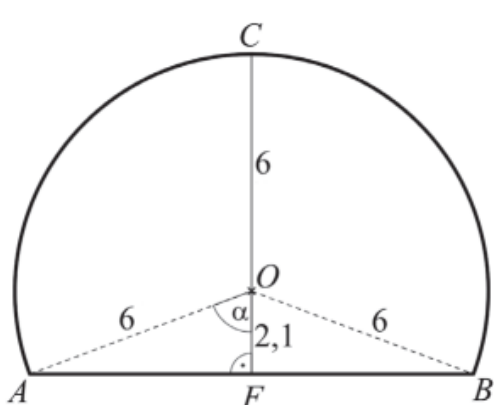
[Vissza a feladathoz.](#)

	1 pont
---	--------

A kartonlap területe $(x + 4) \cdot \left(\frac{50}{x} + 8\right) = 82 + 8x + \frac{200}{x} \text{ cm}^2$	2 pont
A $T: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, T(x) = 82 + 8x + \frac{200}{x} \text{ cm}^2$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont
$T'(x) = 8 - \frac{200}{x^2} = 0$	1 pont
Innen $x = 5$ (mert $x > 0$).	1 pont
$T''(x) = \frac{400}{x^3}$, tehát $T''(5) > 0$. A függvénynek ezért az 5 (lokális és egyben abszolút) minimumhelye.	1 pont
Mivel $\frac{50}{x} = \frac{50}{5} = 10$, ezért a legkisebb területű kartonlap méretei $(5 + 2 \cdot 2 =) 9$ cm, illetve $(10 + 2 \cdot 4 =) 18$ cm.	1 pont

233

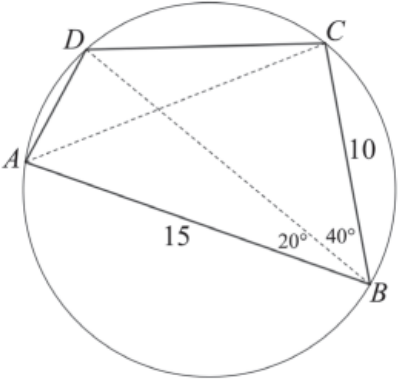
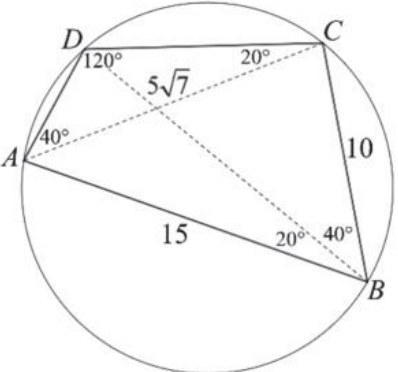
[Vissza a feladathoz.](#)

Az ábra szerinti jelöléseket alkalmazzuk.  (Az AB húr felezőpontja F, $OA = OB = OC = 6 \text{ m}, FC = 8,1 \text{ m}, FO = FC - OC = 2,1 \text{ m}.$)	1 pont
$\cos \alpha = \frac{OF}{OA} = 0,35$, innen $\alpha \approx 69,51^\circ$.	2 pont
Az AOB középponti szög: $360^\circ - 2\alpha \approx 221^\circ$ valóban.	1 pont

234

[Vissza a feladathoz.](#)

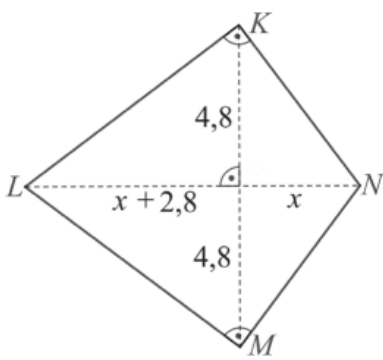
a)

 (ABC háromszögben a B-nél fekvő szög 60°-os.) Koszinusztétel az ABC háromszögben: $AC^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$	1 pont
$AC^2 = 225 + 100 - 150 = 175$	1 pont
$AC = \sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = 5 \cdot \sqrt{7}$ valóban.	1 pont
b)	
$ABCD$ húrnégyszög, ezért $\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.	1 pont
A kerületi szögek tétele miatt $\angle ACD = \angle ABD = 20^\circ$. Innen $\angle CAD = 180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. (Az állítás igaz.)	1 pont
c)	
 Szinusztétel az ACD háromszögben: $\frac{AD}{AC} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 120^\circ}$	1 pont
$AD = 5\sqrt{7} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 5,22$	1 pont

Az $ABCD$ négyszög területe az ABC és az ACD háromszög területének összege: $\frac{15 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ}{2} + \frac{5\sqrt{7} \cdot 5,22 \cdot \sin 40^\circ}{2} \approx$ $\approx (64,95 + 22,19 \approx) 87,1.$	2 pont
--	--------

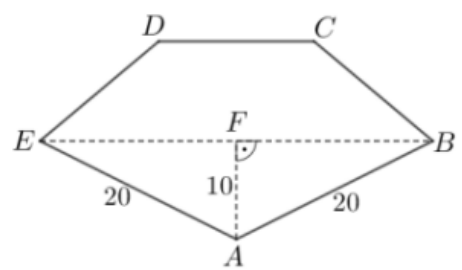
235

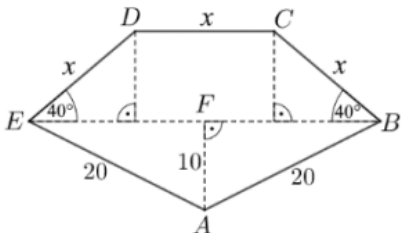
[Vissza a feladathoz.](#)

 A szimmetriaátló szakaszainak hossza x cm, illetve $x + 2,8$ cm.	1 pont
A KLN derékszögű háromszögben a magasságtétel miatt: $x(x + 2,8) = 4,8^2$	2 pont
Rendezés után: $x^2 + 2,8x - 23,04 = 0$.	1 pont
Az egyenlet valós gyökei 3,6 és $-6,4$, de ez utóbbi nem lehetséges.	1 pont
A deltoid LN szimmetriaátlója $3,6 + 6,4 = 10$ cm hosszú,	1 pont
területe $(9,6 \cdot 10 : 2 =) 48 \text{ cm}^2$.	1 pont

236

[Vissza a feladathoz.](#)

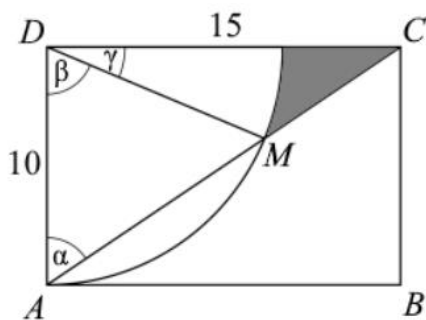
a)	
 Merőlegest állítunk az A csúcsból az EB átlóra, ez az átlót az F (felező) pontban metszi. Ekkor $AF = 10$ cm.	2 pont
(Az $AFB\Delta$ egy szabályos háromszög fele, ezért) az ötszög A csúcsnál fekvő szögének fele 60° -os.	1 pont

Így $\angle BAE = 120^\circ$ és $\angle ABE = \angle AEB = 30^\circ$.	1 pont
(Mivel a húrtrapéz szögei $40^\circ, 40^\circ, 140^\circ, 140^\circ$, ezért) az ötszög szögei: $120^\circ, 70^\circ, 140^\circ, 140^\circ, 70^\circ$.	1 pont
b)	
$EB = 2BF = 2\sqrt{20^2 - 10^2} = 20\sqrt{3} \approx 34,64 \text{ cm}$	1 pont
Az ABE háromszög területe: $\frac{EB \cdot FA}{2} = \frac{20\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 100\sqrt{3} \approx 173,2 \text{ cm}^2$	1 pont
 Ha a trapéz CD oldalának hossza (cm-ben) x, akkor $EB = x + 2x \cos 40^\circ$.	1 pont
Tehát $34,64 = x + 2x \cos 40^\circ = x(1 + 2 \cos 40^\circ)$,	1 pont
ebből $x \approx 13,68 \text{ cm}$.	1 pont
A trapéz magassága $x \sin 40^\circ \approx 8,79 \text{ cm}$,	1 pont
területe $\left(\frac{34,64+13,68}{2} \cdot 8,79\right) \approx 212,4 \text{ cm}^2$.	1 pont
Az ötszög területe $(173,2 + 212,4 =) 385,6 \text{ cm}^2$.	1 pont

221

[Vissza a feladathoz.](#)

A feladat megértését tükröző ábra.



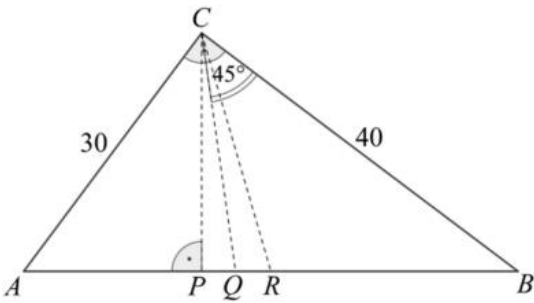
(Használjuk az ábra betűzéseit: A füvesített terület az ADC háromszög. Az öntözött terület a D középpontú negyedkör. Keressük a sötétített síkidom területét.)

1 pont

(Az ADC derékszögű háromszögből) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{10}$,	1 pont
innen $\alpha \approx 56,3^\circ$.	1 pont
Mivel $DA = DM = 10$ (m), ezért DAM háromszög egyenlőszárú, így $\beta = 180^\circ - 2\alpha \approx 67,4^\circ$.	1 pont
A füvesített terület: $T_1 = \frac{10 \cdot 15}{2} = 75$ (m^2).	1 pont
A $\gamma = 90^\circ - \beta \approx 22,6^\circ$ középponti szögű, 10 méter sugarú körcikk területe: $T_2 = \frac{22,6}{360} \cdot 10^2 \cdot \pi \approx 19,7$ (m^2)	1 pont
A DAM háromszög területe: $T_3 = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 67,4^\circ}{2} \approx 46,2$ (m^2)	1 pont
A locsolásból kimaradó füvesített terület nagysága: $T_1 - (T_2 + T_3) = 75 - 65,9 = 9,1$ m^2	1 pont
Az ötszög területe ($173,2 + 212,4 =$) $385,6$ cm^2 .	1 pont

222

[Vissza a feladathoz.](#)

 (Először az AB, AP, AQ, AR szakaszok hosszát határozzuk meg.) A Pitagorasz-tételből $AB = 50$,	1 pont
ezért $AR = RB (= AB:2) = 25$.	1 pont
A befogótételből $AP \cdot AB = AC^2$, ezért $AP = 900 : 50 = 18$.	2 pont
A szögfelezőtétel miatt $AQ:QB = 3:4$, ezért $AQ = \frac{3}{7} \cdot AB = \frac{150}{7}$.	2 pont
$PQ = \left(AQ - AP = \frac{150}{7} - 18 = \right) \frac{24}{7}$ $QR = \left(AR - AQ = 25 - \frac{150}{7} = \right) \frac{25}{7}$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

$AP:PQ:QR:RB = 18:\frac{24}{7}:\frac{25}{7}:25 = 126:24:25:175$	1 pont
---	--------

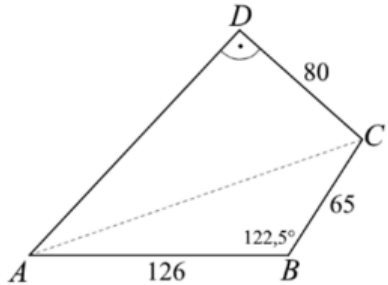
223

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A háromszög legnagyobb szöge az $a + 2$ hosszúságú oldallal szemben van.	1 pont
Erre a szögre felírva a koszinusztételt: $\cos \gamma = \frac{a^2 + (a + 1)^2 - (a + 2)^2}{2a(a + 1)} =$	1 pont
$= \frac{a^2 - 2a - 3}{2a(a + 1)} =$	1 pont
$= \frac{(a + 1)(a - 3)}{2a(a + 1)} =$	2 pont
$= \frac{a-3}{2a}$ valóban ($a \neq 1$).	1 pont
b)	
$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} = \frac{a - 3}{2a}$	1 pont
innen $a = 1,5$.	1 pont
A háromszög oldalainak hossza 1,5; 2,5 és 3,5 egység (és ilyen háromszög valóban létezik).	1 pont

224

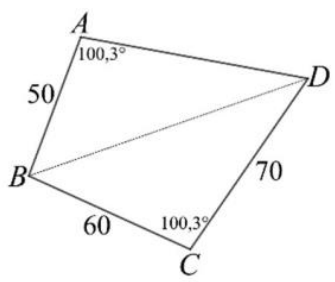
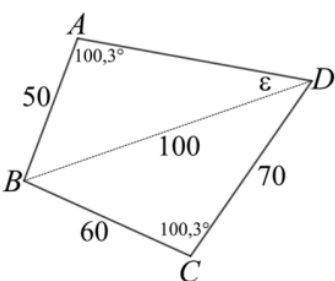
[Vissza a feladathoz.](#)

 Az ABC háromszög területe $\frac{126 \cdot 65 \cdot \sin 122,5^\circ}{2} \approx 3454 \text{ (m}^2\text{)}$	1 pont
---	--------

Az AC átló hossza az ABC háromszögből koszinusztétellel: $AC = \sqrt{126^2 + 65^2 - 2 \cdot 126 \cdot 65 \cdot \cos 122,5^\circ} \approx 170 \text{ (m)}$	1 pont
Az ADC derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $AD = \sqrt{170^2 - 80^2} = 150 \text{ (m)}$	1 pont
Az ADC háromszög területe $\frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{150 \cdot 80}{2} = 6000 \text{ (m}^2\text{)}$	1 pont
A legelő területe $(3454 + 6000 =) 9454 \text{ m}^2 = 0,9454 \text{ ha}$	1 pont
$0,9454 : 0,9 \approx 1,05$, tehát a legelő valódi területe kb. 5%-kal nagyobb a meghirdetetténél.	1 pont

211

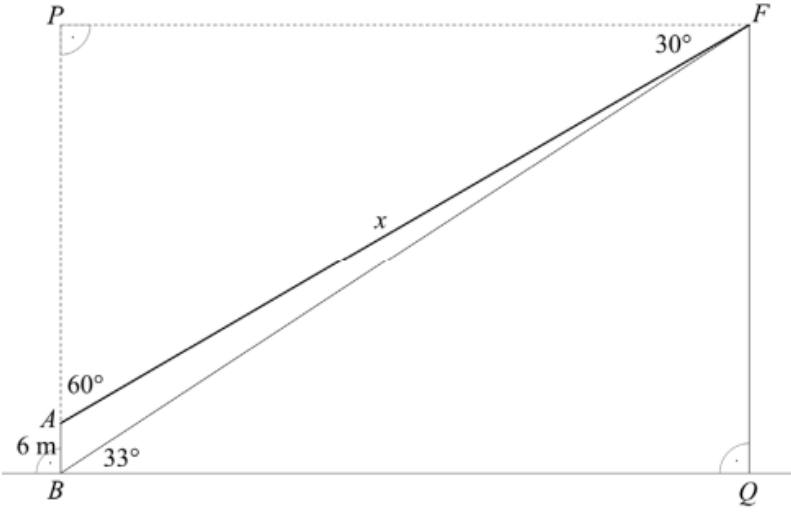
[Vissza a feladathoz.](#)

	1 pont
A BCD háromszög területe $\frac{BC \cdot CD \cdot \sin 100,3^\circ}{2} = \frac{60 \cdot 70 \cdot \sin 100,3^\circ}{2} \approx 2066 \text{ (m}^2\text{)}$	1 pont
A BCD háromszögben koszinusztétellel: $BD^2 = 60^2 + 70^2 - 2 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \cos 100,3^\circ$	1 pont
Ebből $BD \approx 100 \text{ (m)}$.	1 pont
 Az ABD háromszögben szinusztétellel: $\frac{\sin \epsilon}{\sin 100,3^\circ} = \frac{50}{100}$	1 pont
$\sin \epsilon \approx 0,4919$, (mivel ϵ hegyesszög, ezért) $\epsilon \approx 29,5^\circ$.	1 pont

$ABD\angle = (180^\circ - 100,3^\circ - 29,5^\circ) = 50,2^\circ,$	1 pont
ezért az ABD háromszög területe $\frac{AB \cdot BD \cdot \sin 50,2^\circ}{2} = \frac{50 \cdot 100 \cdot \sin 50,2^\circ}{2} \approx 1921 \text{ (m}^2\text{)}$	1 pont
A négyszög területe $2066 + 1921 = 3987 \text{ m}^2.$	1 pont

212

[Vissza a feladathoz.](#)

A szöveg alapján vázlat készítése:  Az alsó állomás A, a felső állomás F, az eredeti tervben szereplő alsó állomás B, a pálya hossza $AF = x$.	2 pont
Az ABF háromszögben $ABF\angle = 57^\circ$ és $BFA\angle = 3^\circ$,	1 pont
ezért szinusztétellel: $\frac{x}{6} = \frac{\sin 57^\circ}{\sin 3^\circ}$	1 pont
Ebből $x \left(= \frac{6 \cdot \sin 57^\circ}{\sin 3^\circ} \right) \approx 96 \text{ m}$ a pálya hossza.	1 pont
Az APF derékszögű háromszögből: $AP = x \cdot \sin 30^\circ = \frac{x}{2}$	1 pont
vagyis $AP \approx 48 \text{ m}$ a pálya szintemelkedése.	1 pont

213

[Vissza a feladathoz.](#)

Az ábra jelöléseit használjuk.	1 pont
Az ABF derékszögű háromszögben $\cos \beta = \frac{50}{130} (\approx 0,3846)$	1 pont
ahonnan $\beta \approx 67,4^\circ$.	1 pont
A BCD háromszög területe 2000 m^2, ezért $\frac{BD \cdot 100 \cdot \sin 67,4^\circ}{2} = 2000$	1 pont
Ebből $BD \approx 43,3$ (méter).	1 pont
A BCD háromszögben felírva a koszinusztételt: $CD^2 = 43,3^2 + 100^2 - 2 \cdot 43,3 \cdot 100 \cdot \cos 67,4^\circ$	1 pont
Ebből a kerítés hossza: $CD \approx 92,4$ méter.	1 pont

214

[Vissza a feladathoz.](#)

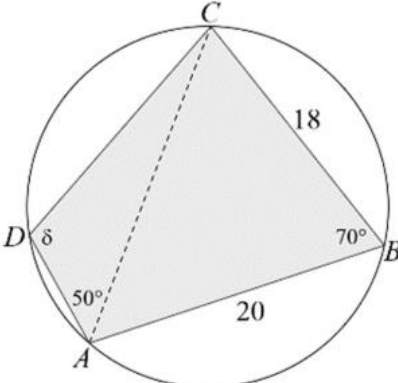
Legyen a háromszög szára (cm-ben mérve) b. Az egyiptomi számítás szerint a terület közelítőleg $\frac{18 \cdot b}{2} = 9b$	1 pont
A háromszög alapjához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel) $m = \sqrt{b^2 - 9^2}$	1 pont
A háromszög területe valójában $\frac{18 \cdot m}{2} = 9 \cdot \sqrt{b^2 - 81}$	1 pont
A valódi terület ($m < b$ miatt) kisebb, mint a közelítő érték,	1 pont
ezért, ha a számításban elkövetett hiba kisebb, mint 25%, akkor $\frac{9b}{9 \cdot \sqrt{b^2 - 81}} < 1,25$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

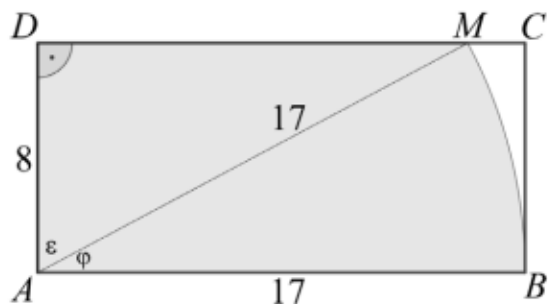
Rendezve: $b < 1,25 \cdot \sqrt{b^2 - 81}$	1 pont
Mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:) $b^2 < 1,5625 \cdot (b^2 - 81)$ ahonnan $b^2 > \frac{1,5625 \cdot 81}{0,5625} = 225$	2 pont
innen $b > 15$. A háromszög szára tehát nagyobb, mint 15 cm. (Ilyen háromszög mindig létezik.)	1 pont

201

[Vissza a feladathoz.](#)

 ABC háromszögben koszinusztétellel: $AC^2 = 20^2 + 18^2 - 2 \cdot 20 \cdot 18 \cdot \cos 70^\circ$	1 pont
$AC \approx 21,86$.	1 pont
A húrnégyszögben $\delta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.	1 pont
ACD háromszögben szinusztétellel: $\frac{CD}{AC} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 110^\circ}$	1 pont
$CD \approx 17,82$.	1 pont
$DCA\angle = 20^\circ$, ezért a négyszög területe: $\frac{20 \cdot 18 \cdot \sin 70^\circ}{2} + \frac{21,86 \cdot 17,82 \cdot \sin 20^\circ}{2} \approx$ ($\approx 169,1 + 66,6 =$) 235,7.	2 pont

a)



1 pont

A feladat feltételeit helyesen tükröző ábra.

(Az ábra jelöléseit használva) az ADM derékszögű háromszögből:

$$DM = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ (cm)}$$

1 pont

Az ADM háromszög területe: $\frac{8 \cdot 15}{2} = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$

1 pont

Az ADM háromszögből $\cos \epsilon = \frac{8}{17}, \epsilon \approx 61,93^\circ$

1 pont

A BAM körcikk középponti szöge:

$$\varphi = 90^\circ - \epsilon \approx 28,07^\circ$$

1 pont

területe: $\frac{17^2 \pi \cdot 28,07^\circ}{360^\circ} \approx 70,8 \text{ (cm}^2\text{)}$

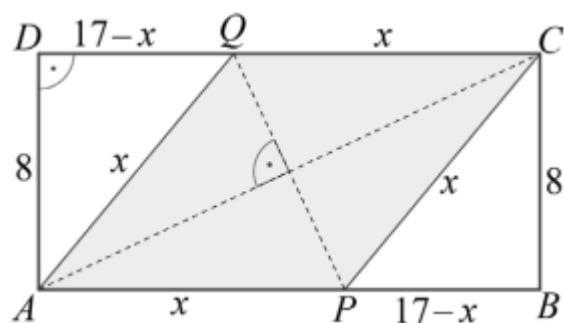
1 pont

A téglalaphoz lefedett rész területe körülbelül:

$$60 + 70,8 = 130,8 \text{ cm}^2.$$

1 pont

b)



1 pont

Megfelelő ábra. (A rombusz oldalának hossza x cm.)Az AQD derékszögű háromszögben (Pitagorasz-tétellel):

$$(17 - x)^2 + 8^2 = x^2$$

1 pont

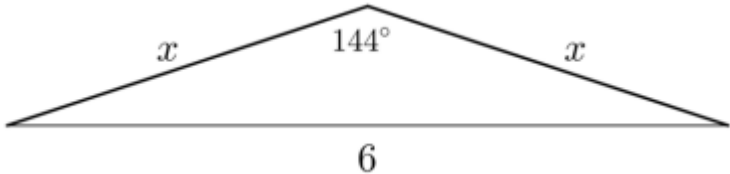
$$289 - 34x + x^2 + 64 = x^2$$

1 pont

$34x = 353$ $x = \frac{353}{34} \approx 10,38 \text{ (cm)}$	1 pont
A rombusz kerülete $4x = \frac{706}{17} \approx 41,5 \text{ cm}$	1 pont

203

[Vissza a feladathoz.](#)

A szabályos tízszög egy belső szöge 144° -os.	1 pont
 A tízszög oldalának (cm-ben mért) hosszát jelölje x. Koszinusztétellel: $6^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 144^\circ = 2 \cdot (1 - \cos 144^\circ) \cdot x^2$	2 pont
ahonnan ($x > 0$ miatt) $x \approx 3,15 \text{ (cm)}$.	1 pont

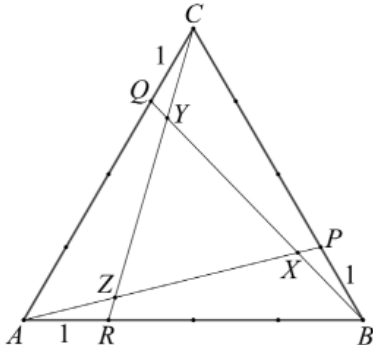
204

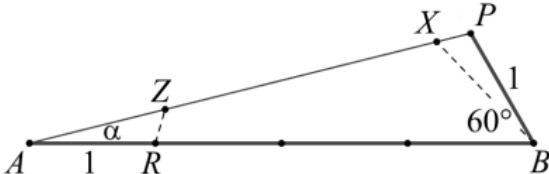
[Vissza a feladathoz.](#)

$90 \text{ km/h} = 1,5 \text{ km/perc} = 1500 \text{ m/perc}$	1 pont
A hajtókerék kerülete: $1740\pi \approx 5466 \text{ (mm)}$, ami kb. $5,47 \text{ m}$.	2 pont
Egy perc alatt a kerék $\frac{1500}{5,47} \approx 274$ -et fordul.	1 pont

205

[Vissza a feladathoz.](#)

	A (harmadrendű) forgásszimmetria miatt az ARZ, BPX és CQY háromszögek egybevágók, és az XYZ háromszög szabályos.	1 pont
---	---	--------

Az XYZ háromszög területéhez elegendő például a ZX szakasz hosszát kiszámítani: $ZX = AP - AZ - XP = AP - AZ - ZR$ (az ARZ és BPX háromszögek egybevágósága miatt ugyanis $XP = ZR$).	1 pont
Használjuk az ábra jelöléseit!  Az ABP háromszögben koszinusztétellel: $AP^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 13,$ $AP = \sqrt{13} \ (\approx 3,606)$	2 pont
Koszinusztétellel ($\alpha = BAP\angle$): $\cos \alpha = \frac{AP^2 + AB^2 - BP^2}{2 \cdot AP \cdot AB}$ $\cos \alpha = \frac{13 + 16 - 1}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot 4} \ (\approx 0,9707)$ $\alpha \approx 13,9^\circ$	2 pont
Az ARZ háromszögben $AR = 1, AZR\angle = 60^\circ, ARZ\angle = 120^\circ - \alpha \approx 106,1^\circ.$	1 pont
Szinusztétellel: $\frac{AZ}{1} = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ} \approx 1,1094$ vagyis $AZ \approx 1,109$;	1 pont
$\frac{ZR}{1} = \frac{\sin \alpha}{\sin 60^\circ} \approx 0,2774$ vagyis $ZR \approx 0,277$.	1 pont
$ZX = AP - AZ - ZR \ (\approx 3,606 - 1,109 - 0,277) = 2,220$	1 pont
Az XYZ szabályos háromszög területe: $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot ZX^2 \approx 2,13$	1 pont