

Sorozatok monotonitása és korlátossága feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámaára kattintva találod meg.

[241](#) | 2024. május 5./b

Igazolja, hogy az $a_n = \frac{n+4}{n}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő!

[3 pont]

[221](#) | 2022. október 4./c

Adott az $a_n = \frac{2+2\pi n}{n}$ sorozat ($n \in \mathbb{N}^+$).

Igazolja, hogy ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos, és adja meg a sorozat határértékét!

[5 pont]

[201](#) | 2020. október 6./c

Igazolja, hogy ha L és K adott pozitív számok, $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a $b_n = \frac{L}{1+K \cdot 0,75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekedő, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

[7 pont]

Megoldások

241

[Vissza a feladathoz.](#)

$\left(a_n = \frac{n+4}{n} = 1 + \frac{4}{n}\right)$ (Az $\{n\}$ szigorúan monoton nő, ezért) az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ szigorúan monoton csökken,	1 pont
tehát a $\left\{\frac{4}{n}\right\}$ is szigorúan monoton csökken.	1 pont
Vagyis az $\{a_n\}$ valóban szigorúan monoton csökken.	1 pont

221

[Vissza a feladathoz.](#)

$a_n = \frac{2}{n} + 2\pi$	1 pont
A $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, 2π pedig állandó, ezért az a_n sorozat is szigorúan monoton csökkenő.	1 pont
A sorozat felülről korlátos, mert a csökkenő sorozat első tagja egy felső korlát; alulról is korlátos, mert a sorozat mindegyik tagja pozitív (ezért például a 0 egy alsó korlátja a sorozatnak).	1 pont
A $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ sorozat határértéke 0,	1 pont
ezért a megadott sorozat határértéke $(0 + 2\pi =) 2\pi$.	1 pont

201

[Vissza a feladathoz.](#)

(Mindenhol felhasználjuk, hogy a feladat szövege szerint L, K, n pozitív számok.) A $\{b_n\}$ sorozat alulról korlátos, mert minden tagja pozitív (egy alsó korlát például a 0).	1 pont
A $\{b_n\}$ sorozat felülről is korlátos, mert $\frac{L}{1+K \cdot 0,75^n} < L$ (minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén), hiszen a tört nevezője 1-nél nagyobb. (A $\{b_n\}$ sorozat tehát korlátos.)	2 pont
A $\{0,75^n\}$ (mértani) sorozat szigorúan monoton csökkenő, ezért az $1 + K \cdot 0,75^n$ sorozat is az.	1 pont

Ebből következik, hogy az $\left\{\frac{L}{1+K \cdot 0,75^n}\right\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő. (A $\{b_n\}$ tehát konvergens.)	1 pont
Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,75^n = 0$,	1 pont
így $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{1+K \cdot 0,75^n} = \frac{L}{1+K \cdot 0} = L$.	1 pont