

Szélsőérték feladatok az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámára kattintva találod meg.

261 | 2026. május 9./b

Egy felül nyitott téglatest magassága 35 cm, a térfogata $126\,000\text{ cm}^3$.

Mekkora legyen a téglatest alaplajának az éleit, hogy a felszíne (az alaplaj és a négy oldallap területének összege) minimális legyen?

[8 pont]

251 | 2025. május 7./b

Felül nyitott, négyzet alapú egyenes hasáb alakú tárolódobozt készítünk. A doboz alaplajának anyagköltsége 4 tallér négyzetdeciméterenként, az oldallapok anyagköltsége 3 tallér négyzetdeciméterenként. Az egész doboz anyagköltségére összesen 300 tallér áll rendelkezésre.

Határozza meg a 300 tallérból elkészíthető maximális térfogatú doboz éleinek hosszát!

[8 pont]

252 | 2025. május idegen nyelvi 8./c

Egy 2 liter űrtartalmú, felül nyitott, forgáshenger alakú vázát készítünk.

Hány centiméter magas legyen a váza, ha azt szeretnénk, hogy a belső felszíne minimális legyen?

[8 pont]

253 | 2025. október 7./a, b

Egy hajójárat üzemeltetési költsége két részből tevődik össze. Az üzemanyagköltség jó közelítéssel egyenesen arányos a hajó sebességével: v km/h sebesség esetén $1,2v$ dukát kilométerenként. Az egyéb rezsiköltség egyenesen arányos a menetidővel: 90 dukát üzemóránként. A hajónak egy 10 km-es utat kell megtennie.

- a) Hány dukát az erre az útra eső üzemeltetési költség, ha a hajó az utat 12 km/h állandó sebességgel teszi meg?

[4 pont]

- b) Mekkora állandó sebességgel tegye meg ezt a 10 km-es utat a hajó, hogy az útra eső üzemeltetési költség minimális legyen? Mennyi ez a minimális költség?

[9 pont]

241 | 2024. május 7./ c

Határozza meg az 1,8 méter alkotójú forgáskúpok közül annak a sugarát és a magasságát, amelynek a térfogata maximális! Mekkora ez a maximális térfogat?

[8 pont]

242 | 2024. május idegen nyelvi 5./c

Egy négyzetes oszlop felszíne 384 cm^2 .

Hogyan válasszuk meg a 384 cm^2 felszínű négyzetes oszlop alapéleit, illetve oldaléleit, hogy a nyolc alapél és a négy oldalél hosszának az összege minimális legyen?

[8 pont]

243 | 2024. október 8./b, c

Jancsi nyári diákmunkaként zabhegyezést vállalt Kukutyinban. Tudja, hogy ha a zabhegyező gépbe k kg zabot helyez, akkor a gép $\frac{k^2}{40} + 90$ perc alatt végez a zabhegyezéssel. Jancsinak összesen 1000 kg zabot kell kihegyeznie a gép segítségével. Elhatározza, hogy a zabot egyenlő részekre osztva fogja kihegyezni.

- b) Hány óra alatt végez Jancsi a zabhegyezéssel, ha 8 egyenlő részre osztja az 1000 kg zabot?

[3 pont]

- c) Az 1000 kg zabot n egyenlő részre osztjuk ($n \in \mathbb{Z}^+$). Határozza meg n értékét úgy, hogy az 1000 kg zab kihegyezésének ideje minimális legyen! Hány óra ez a minimális idő?

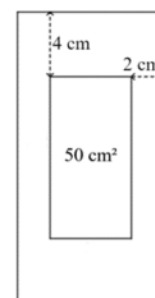
[10 pont]

231 | 2023. május 6./c

Egy téglalap alakú kartonlap oldalhosszait úgy szeretnénk megválasztani, hogy alul és felül 4-4 cm-es, jobb és bal oldalon 2-2 cm-es margót hagyva a lap közepén megmaradó téglalap alakú terület 50 cm^2 nagyságú legyen.

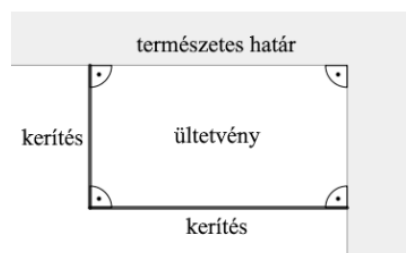
Mekkorának válasszuk a kartonlap oldalainak hosszát, hogy a területe a lehető legkisebb legyen?

[8 pont]



232 | 2023. október 7./d

Különleges facsemeték neveléséhez egy téglalap alakú részt akarnak elkeríteni. A téglalap két szomszédos oldala természetes határokkal védhető, ezért csak a másik két oldalon kell kerítést építeni. A környezeti adottságok miatt a kerítés építési költsége a két oldalon különböző: az egyik oldalon 5 ezer Ft/m, a másik oldalon pedig 10 ezer Ft/m. A kerítés építésére összesen 400 ezer Ft áll rendelkezésre.



Hogyan kell megválasztani a két kerítésszakasz hosszát, hogy a rendelkezésre álló összegből a legnagyobb területű ültetvényt lehessen elkeríteni?

[6 pont]

221 | 2022. május 7./b, c

Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0,8x^2(x - 3)(1,5 - x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.)

b) Mutassa meg, hogy csak $1,5 < x < 3$ esetén nyereséges a napi termelés!

[4 pont]

c) Hány tallér az elérhető legnagyobb napi nyereség, és ezt hány tonna liszt (előállítás és eladása) esetén éri el?

[9 pont]

222 | 2022. május idegen nyelvi 6./b

Egy gyárban olyan 5 liter űrtartalmú lábosokat készítenek, melyek alakja jó közelítéssel (felül nyitott) forgáshenger.

A lábosok külső felületét vékony, piros zománcréteggel vonják be.

Mekkora legyen az 5 literes lábos alapkörének a sugara, hogy a külső felület bevonásához a lehető legkevesebb zománcot kelljen felhasználni?

[8 pont]

223 | 2022. október 8./b

Egy téglatest térfogata 72 dm^3 . A téglatest egyik éle kétszer olyan hosszú, mint egy másik éle.

Határozza meg az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a minimális felszínű téglatest éleinek hosszát!

[8 pont]

211 | 2021. május 8./a, b

Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n -szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni ($n \in \mathbf{N}^+$). Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

- a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik!

[3 pont]

- b) Határozza meg azt az n értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne!

[9 pont]

212 | 2021. május idegen nyelvi 7./b

Határozza meg a $10\,000\text{ cm}^2$ felszínű forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatú henger alapkörének a sugarát és a henger magasságát!

[9 pont]

213 | 2021. október 7./b

A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.

Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az y tengellyel.)

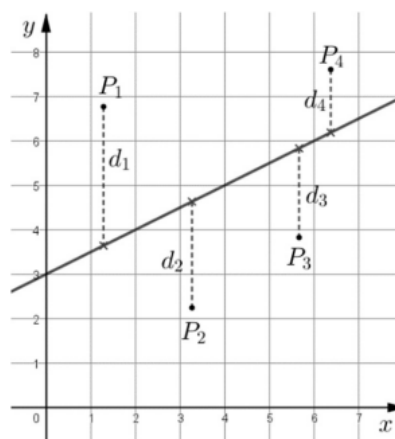
Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak négyzetösszege (az ábrán látható példában $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$).

Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.

Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1; 3)$, $B(3; 5)$ és $C(4; 4)$.

Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen* az A, B és C pontokra! ($m \in \mathbf{R}$)

[6 pont]



214 | 2021. október 9./b, c

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint).

- b) Igazolja, hogy az m cm magasságú torta térfogata (köbcentiméterben mérve)
 $225\pi m - \pi m^3$ ($0 < m < 15$)

[4 pont]

- c) Igazolja, hogy a védőbúra alatt (a fent leírt módon) elhelyezhető maximális térfogatú torta térfogata kisebb, mint a félgömb térfogatának 60%-a!

[7 pont]

201 | 2020. május 7./c

A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2; 0)$, $Q(6; 0)$ és $R(0; 5)$ pontok, a H pedig a PQ szakasz tetszőleges pontja.

Adja meg a H pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

[7 pont]

202 | 2020. május 9./a, b

Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek).

A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készítettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérnál drágább, de 455 tallérnál olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.

- a) Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnék a vonaljegyek árát?

[4 pont]

- b) Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel?

[12 pont]

203 | 2020. május idegen nyelvi 9./b, c

Több próbaút során is vizsgálták, hogy a mozdony szénfogyasztása hogyan függ a mozdony átlagsebességétől. A mérések szerint v km/h átlagsebesség esetén ($50 < v < 100$) jó közelítéssel $0,5v^2 - 65v + 3800$ kg volt az óránkénti szénfogyasztás. A mozdony a hozzákapcsolt szerkocsiban 6,1 tonna szenet tud magával vinni.

- b) Számítsa ki, hogy 60 km/h átlagsebesség esetén (a megadott modell szerint) hány km hosszúságú útra elegendő a 6,1 tonna szénkészlet!

[3 pont]

- c) Határozza meg azt az átlagsebességet, amelynél a 6,1 tonna szén a lehető leghosszabb útra elegendő!

[9 pont]

Megoldások

261

[Vissza a feladathoz.](#)

A téglatest alaplapjának éleit jelöljük a -val és b -vel. Ekkor a térfogatra felírható: $a \cdot b \cdot 35 = 126\,000 \text{ cm}^3$,	1 pont
amiből $ab = 3600 \text{ cm}^2$, így $b = \frac{3600}{a}$.	1 pont
A téglatest felszíne: $3600 + 2 \cdot 35a + 2 \cdot 35b = 3600 + 70a + \frac{252000}{a}$	1 pont
Vizsgáljuk a pozitív valós számokon értelmezett $f(a) = 3600 + 70a + \frac{252000}{a}$ függvényt. Ennek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont
$f'(a) = 70 - \frac{252000}{a^2} = 0$	1 pont
amiből ($a > 0$ miatt) $a = 60 \text{ cm}$.	1 pont
Ha $0 < a < 60$, akkor $f'(a) < 0$, ha pedig $a > 60$, akkor $f'(a) > 0$ ezért ez valóban (abszolút) minimumhelye f -nek.	1 pont
Tehát a felszín akkor minimális, ha $a = 60 \text{ cm}$, és ekkor $b = \frac{3600}{60} = 60 \text{ cm}$ szintén.	1 pont

251

[Vissza a feladathoz.](#)

Jelölje a doboz alapélét a , magasságát b . A doboz elkészítésének költsége ekkor $a^2 \cdot 4 + 4ab \cdot 3 = 4a^2 + 12ab = 300$ tallér.	1 pont
(Keressük a^2b maximumát.) Kifejezzük b -t: $b = \frac{300-4a^2}{12a} = \frac{25}{a} - \frac{a}{3}$,	1 pont
és ezzel felírjuk a doboz térfogatát: $V = a^2b = a^2 \left(\frac{25}{a} - \frac{a}{3} \right) = 25a - \frac{a^3}{3}$	1 pont
A pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(a) = 25a - \frac{a^3}{3}$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.	1 pont

$f'(a) = 25 - a^2$	1 pont
$25 - a^2 = 0$ -ból ($a > 0$ miatt) $a = 5$, majd $b = \frac{10}{3}$.	1 pont
Az első deriváltfüggvény előjele $a = 5$ -ben pozitívról negatívra változik.	1 pont
A 300 tallérból elkészíthető maximális térfogatú doboz alapéle tehát 5 dm, magassága $\frac{10}{3}$ dm.	1 pont

252

[Vissza a feladathoz.](#)

(Jelölje r az alapkör sugarát, m a henger magasságát cm-ben.) A henger térfogata $V = r^2\pi m = 2000 \text{ cm}^3$,	1 pont
amelyből a váza magassága $m = \frac{2000}{r^2\pi}$.	1 pont
A felül nyitott henger felszíne $A = r^2\pi + 2r\pi m = r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{2000}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{4000}{r}$	1 pont
Az $f(r) = r^2\pi + \frac{4000}{r}$ ($r > 0$) függvény deriváltfüggvénye $f'(r) = 2r\pi - \frac{4000}{r^2}$	1 pont
(Az f -nek ott lehet minimumhelye, ahol $f'(r) = 0$, azaz) $2r\pi - \frac{4000}{r^2} = 0$	1 pont
Ebből $r \left(= \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}} \right) \approx 8,6 \text{ cm}$.	1 pont
Ha $0 < r < 8,6$, akkor az első derivált negatív, ha $r > 8,6$, akkor pedig pozitív, tehát az $r = 8,6$ minimumhely.	1 pont
Tehát a váza magassága $m = \frac{2000}{8,6^2\pi} \approx 8,6 \text{ cm}$ legyen.	1 pont

253

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A 10 km-re eső üzemanyagköltség 12 km/h sebesség esetén $10 \cdot 1,2 \cdot 12 = 144$ dukát.	1 pont
12 km/h sebességgel a 10 km-es utat $\frac{10}{12}$ óra alatt teszi meg a hajó,	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

az erre eső rezsiköltség $\frac{10}{12} \cdot 90 = 75$ dukát.	1 pont
A 10 km-es útra eső teljes üzemeltetési költség tehát 12 km/h sebesség esetén $(144 + 75 =)$ 219 dukát.	1 pont
b)	
A 10 km-re eső üzemanyagköltség v km/h sebesség esetén $10 \cdot 1,2v = 12v$ dukát.	1 pont
A hajó v km/h állandó sebességgel a 10 km-es utat $\frac{10}{v}$ óra alatt teszi meg,	1 pont
a rezsiköltség ezért $\frac{10}{v} \cdot 90 = \frac{900}{v}$ dukát.	1 pont
A 10 km-es útra eső teljes üzemeltetési költség tehát v km/h állandó sebesség esetén $12v + \frac{900}{v}$ dukát.	1 pont
Az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(v) = 12v + \frac{900}{v}$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont
$f'(v) = 12 - \frac{900}{v^2} = 0$	1 pont
innen $v = \sqrt{\frac{900}{12}} = \sqrt{75} \approx 8,66$ km/h (mert $v > 0$).	1 pont
Az f' függvény értéke $v < \sqrt{75}$ esetén negatív, $v > \sqrt{75}$ esetén pedig pozitív, így a $\sqrt{75}$ valóban (abszolút) minimumhelye f -nek.	1 pont
A 10 km-re eső teljes üzemeltetési költség tehát 8,66 km/h sebesség esetén minimális, kb. 208 dukát.	1 pont

241

[Vissza a feladathoz.](#)

Jelölje a kúp alapkörének sugarát r , magasságát m , ekkor $r^2 + m^2 = 1,8^2$, ahonnan $r^2 = 3,24 - m^2$.	1 pont
A forgáskúp térfogata: $\frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{(3,24 - m^2) \cdot \pi m}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot (3,24m - m^3)$	1 pont
A $V:]0; 1,18[\rightarrow \mathbf{R}$; $V(m) = \frac{\pi}{3} \cdot (3,24m - m^3)$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont
$V'(m) = \frac{\pi}{3} \cdot (3,24 - 3m^2) = 0$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Innen ($m > 0$ miatt) $m = \sqrt{1,08} \approx 1,04$ m.	1 pont
Az $m = \sqrt{1,08}$ helyen a deriváltfüggvény pozitívból negatívba megy át, ezért itt V -nek (abszolút) maximuma van.	1 pont
Ekkor $r (= \sqrt{3,24 - 1,08} = \sqrt{2,16}) \approx 1,47$ m,	1 pont
a maximális térfogat pedig kb. $2,35 \text{ m}^3$.	1 pont

242

[Vissza a feladathoz.](#)

Legyen a négyzetes oszlop alapéle a cm, oldaléle b cm hosszú. Ezzel a felszíne $A = 2a^2 + 4ab = 384 \text{ (cm}^2\text{)}$,	1 pont
ahonnan $b = \frac{384-2a^2}{4a}$ (ahol $a \in]0; \sqrt{192}[$).	1 pont
Az élek hosszának összege: $8a + 4b = 8a + \frac{384 - 2a^2}{a} = 6a + \frac{384}{a}$	1 pont
A $]0; \sqrt{192}[$ halmazon értelmezett) $f(a) = 6a + \frac{384}{a}$ függvény deriváltfüggvénye $f'(a) = 6 - \frac{384}{a^2}$.	1 pont
Az f -nek ott lehet minimumhelye, ahol $f'(a) = 0$, azaz ($a \in]0; \sqrt{192}[$ miatt) $a = 8$ -nál.	2 pont
Az első deriváltfüggvény előjele $a = 8$ -ban negatívról pozitívrá változik, ezért ez valóban (abszolút) minimumhely.	1 pont
Ekkor $b = \frac{384-2 \cdot 8^2}{4 \cdot 8} = 8$ (a négyzetes oszlop tehát kocka, a minimális összeg pedig 96 cm).	1 pont

243

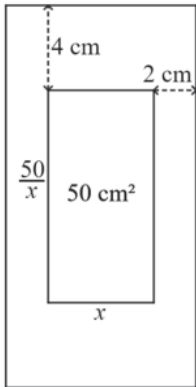
[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
Ha 8 egyenlő részre osztjuk az 1000 kg zabot, akkor egy rész tömege 125 kg.	1 pont
A gép ekkor $8 \cdot \left(\frac{125^2}{40} + 90 \right) = 3845$ perc,	1 pont
azaz $\left(\frac{3845}{60} \approx \right)$ 64 óra alatt végez a zabhegyezéssel.	1 pont
c)	

Ha n egyenlő részre osztjuk az 1000 kg zabot, akkor egy rész tömege $\frac{1000}{n}$ kg.	1 pont
A gép ekkor $n \cdot \left(\frac{1}{40} \cdot \frac{1000^2}{n^2} + 90 \right) = \frac{25\,000}{n} + 90n$ perc alatt végez a munkával.	2 pont
Vizsgáljuk az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{25\,000}{x} + 90x$ függvényt. Ennek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont
$f'(x) = -\frac{25\,000}{x^2} + 90 = 0$	1 pont
Innen $x = \sqrt{\frac{25\,000}{90}} = \frac{50}{3} \approx 16,67$ (mert $x > 0$).	1 pont
Ha $x > 16,67$, akkor $f'(x) > 0$, ha pedig $0 < x < 16,67$, akkor $f'(x) < 0$, ezért ez valóban (abszolút) minimumhelye f -nek.	1 pont
(Mivel $n \in \mathbf{Z}^+$, a minimális időt $n = 16$ -nál vagy $n = 17$ -nél kapjuk.) $f(16) = 3002,5$ és $f(17) \approx 3000,6$,	1 pont
így az 1000 kg zab kihegyezésének ideje akkor minimális, ha 17 egyenlő részre osztjuk.	1 pont
Ekkor a zabhegyezési idő kb. $\left(\frac{3000}{60} = \right)$ 50 óra.	1 pont

231

[Vissza a feladathoz.](#)

	1 pont
A kartonlap területe $(x + 4) \cdot \left(\frac{50}{x} + 8 \right) = 82 + 8x + \frac{200}{x} \text{ cm}^2$	2 pont
A $T: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, T(x) = 82 + 8x + \frac{200}{x} \text{ cm}^2$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont

$T'(x) = 8 - \frac{200}{x^2} = 0$	1 pont
Innen $x = 5$ (mert $x > 0$).	1 pont
$T''(x) = \frac{400}{x^3}$, tehát $T''(5) > 0$. A függvénynek ezért az 5 (lokális és egyben abszolút) minimumhelye.	1 pont
Mivel $\frac{50}{x} = \frac{50}{5} = 10$, ezért a legkisebb területű kartonlap méretei $(5 + 2 \cdot 2 =) 9$ cm, illetve $(10 + 2 \cdot 4 =) 18$ cm.	1 pont

232

[Vissza a feladathoz.](#)

Az 5 ezer Ft/m költségű kerítésszakasz legyen x m hosszú, a 10 ezer Ft/m költségű szakasz pedig y m hosszú ($x > 0$, $y > 0$). A teljes építési költség ekkor $5x + 10y = 400$ (ezer Ft). Innen $y = 40 - 0,5x$.	1 pont
A téglalap alakú ültetvény területe (m^2 -ben): $xy = x(40 - 0,5x) = 40x - 0,5x^2$.	1 pont
$40x - 0,5x^2 = -0,5(x - 40)^2 + 800$	1 pont
Ennek $x = 40$ esetén van maximuma,	1 pont
akkor $y = 20$.	1 pont
A 400 ezer Ft-ból elkeríthető legnagyobb területű ültetvény 5 ezer Ft/m költségű oldala 40 m, a 10 ezer Ft/m költségű oldala 20 m hosszú. (Az ültetvény területe ekkor $800 m^2$.)	1 pont

221

[Vissza a feladathoz.](#)

b)	
Ha $0 < x < 5$, akkor x^2 pozitív,	1 pont
tehát pontosan akkor van nyereség, ha $(x - 3)(1,5 - x) > 0$.	1 pont
Ez akkor teljesül, ha a két tényező azonos előjelű. A két tényező egyszerre nem lehet pozitív. Mindkettő negatív, ha $1,5 < x < 3$. (Ezzel az állítást beláttuk.)	2 pont
c)	
A nyereségfüggvény: $n(x) = -0,8x^4 + 3,6x^3 - 3,6x^2$	1 pont

Ennek deriváltfüggvénye: $n'(x) = -3,2x^3 + 10,8x^2 - 7,2x$	1 pont
Az n függvénynek szélsőértéke lehet, ha $n'(x) = 0$. $-3,2x^3 + 10,8x^2 - 7,2x = 0$	1 pont
Kiemelve x -et, az $x(-3,2x^2 + 10,8x - 7,2) = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 \approx 0,91$, $x_3 \approx 2,46$.	2 pont
Mivel csak $1,5 < x < 3$ esetén nyereséges a termelés, ezért az $x \approx 2,46$ helyen kell megvizsgálni a függvényt.	1 pont
Az első deriváltfüggvény előjele $x \approx 2,46$ -ban pozitívról negatívra változik, ezért ez (abszolút) maximumhely.	1 pont
$n(2,46) = 0,8 \cdot 2,46^2 \cdot (-0,54) \cdot (-0,96) \approx 2,51$.	1 pont
A legnagyobb elérhető napi nyereség tehát körülbelül 25 100 tallér, ami kb. 2,46 tonna liszt előállításával és eladásával érhető el.	1 pont

222

[Vissza a feladathoz.](#)

$V = r^2\pi m = 5000$, innen $m = \frac{5000}{r^2\pi}$.	1 pont
(A felül nyitott forgáshenger felszínét kell minimalizálni.) $A = r^2\pi + 2r\pi m = r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{5000}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{10\,000}{r}$	2 pont
A pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(r) = r^2\pi + \frac{10\,000}{r}$ függvény deriváltfüggvénye $f'(r) = 2r\pi - \frac{10\,000}{r^2}$.	1 pont
(Az f függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.) $f'(r) = 0$, innen $r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}} \approx 11,7$ cm.	2 pont
$r < \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$ esetén $f'(r) < 0$, $r > \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$ esetén $f'(r) > 0$, így ezen a helyen az f függvénynek minimuma van.	1 pont
A lehető legkevesebb zománcra akkor van szükség, ha a lábos alapkörének sugara kb. 11,7 cm.	1 pont

223

[Vissza a feladathoz.](#)

A téglatest élei (dm-ben mérve) a , $2a$ és b ($a, b > 0$).	1 pont
---	--------

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

A szöveg alapján a térfogat: $72 = 2a^2b$, ahonnan $b = \frac{36}{a^2}$.	1 pont
A téglatest felszíne (dm ² -ben mérve): $4a^2 + 6ab = 4a^2 + \frac{216}{a}$	1 pont
Az $A: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $A(a) = 4a^2 + \frac{216}{a}$ függvény deriválható, $A'(a) = 8a - \frac{216}{a^2}$	2 pont
Minimuma ott lehet, ahol $A'(a) = 0$. Ekkor $a = 3$.	1 pont
Az első deriváltfüggvény előjele $a = 3$ -ban negatívról pozitívrá változik, ezért ez valóban minimumhely.	1 pont
A minimális felszínű téglatest élei 3 dm, 6 dm, illetve $(36 : 9 =) 4$ dm hosszúak.	1 pont

211

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A sorsjegy árát 200 (= $20 \cdot 10$) Ft-tal csökkentették, tehát $n = 20$.	1 pont
Ekkor az eladott sorsjegyek száma $10n^2 = 4000$ -rel több, azaz $5000 + 4000 = 9000$ db,	1 pont
a havi bevétel pedig $9000 \cdot 300 = 2\,700\,000$ Ft.	1 pont
b)	
Tegyük fel, hogy n -szer csökkentették 10 Ft-tal az árat, ekkor az új ár $500 - 10n$ (Ft) (ahol $n < 50$),	1 pont
és a havi eladott darabszám $5000 + 10n^2$.	1 pont
Az eladásból származó bevétel Ft-ban: $(500 - 10n)(5000 + 10n^2) = -100n^3 + 5000n^2 - 50\,000n + 2\,500\,000$	1 pont
Tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -100x^3 + 5000x^2 - 50\,000x + 2\,500\,000$ függvényt	1 pont
Ennek deriváltfüggvénye $f'(x) = -300x^2 + 10\,000x - 50\,000 \quad (x \in \mathbf{R})$	1 pont
melynek zérushelyei $x_1 \approx 6,13$ és $x_2 \approx 27,21$.	1 pont

A deriváltfüggvény pontosan a két gyök között pozitív, és x_2 -ben pozitívból negatívba vált, ezért x_2 az f maximumhelye (x_1 -ben negatívból pozitívba vált a deriváltfüggvény).	1 pont
(n értéke csak egész lehet:) $f(27) = 2\,826\,700 > f(28) = 2\,824\,800$, ezért (a modell szerint) 27-szer 10 Ft-tal (230 Ft-ra) kell csökkenteni a sorsjegy árát ahhoz, hogy az értékesítésből származó havi bevétel maximális legyen.	2 pont

212

[Vissza a feladathoz.](#)

(cm-ben és cm^2 -ben számolunk) A henger felszíne $10\,000 = 2r^2\pi + 2r\pi m$, innen a henger magassága $m = \frac{10\,000 - 2r^2\pi}{2r\pi} = \frac{5000 - r^2\pi}{r\pi}$	2 pont
térfogata $V = r^2\pi m$, tehát $V(r) = 5000r - r^3\pi$ (ahol $0 < r < \sqrt{\frac{5000}{\pi}}$)	2 pont
$V'(r) = 5000 - 3r^2\pi$	1 pont
A térfogat akkor lehet maximális, ha $V'(r) = 0$, azaz $5000 - 3r^2\pi = 0$,	1 pont
innen ($r > 0$ miatt) $r = \sqrt{\frac{5000}{3\pi}} \approx 23,03$ cm (és ez az értelmezési tartományban van).	1 pont
Az $r = \sqrt{\frac{5000}{3\pi}}$ helyen a deriváltfüggvény pozitívból negatívba megy át, ezért az eredeti függvénynek itt (abszolút) maximuma van.	1 pont
Ekkor $m = \frac{5000 - r^2\pi}{r\pi} \approx 46,07$ cm	1 pont

213

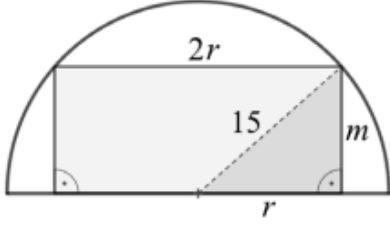
[Vissza a feladathoz.](#)

Az A pontnak az $y = mx$ egyenestől mért függőleges távolsága az $(1; 3)$ és az $(1; m)$ pontok távolsága. Ugyanígy a B pont függőleges távolsága a $(3; 5)$ és a $(3; 3m)$, a C ponté pedig a $(4; 4)$ és a $(4; 4m)$ pontok távolsága.	1 pont
--	--------

Tehát az alábbi összeg minimumát keressük: $(m - 3)^2 + (3m - 5)^2 + (4m - 4)^2 =$	2 pont
$= 26m^2 - 68m + 50$	1 pont
Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú f függvénynek minimuma van, ha $a > 0$, és ezt a minimumot $x = -\frac{b}{2a}$ -nál veszi fel.	1 pont
A $26m^2 - 68m + 50$ kifejezés tehát $m = \frac{68}{52} = \frac{17}{13}$ -nál lesz minimális. (A keresett egyenes egyenlete $y = \frac{17}{13}x$.)	1 pont

214

[Vissza a feladathoz.](#)

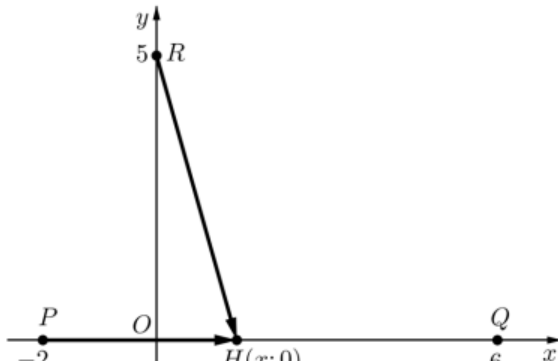
b)	
(A hosszúságokat cm-ben, a területeket cm ² -ben, a térfogatot cm ³ -ben adjuk meg.) 	1 pont
Az ábra az m magasságú henger forgástengelyén áthaladó egyik síkmetszetét mutatja. A búra sugara 15, a torta alapkörének sugara r ($0 < r < 15$).	
Pitagorasz-tétellel: $r^2 + m^2 = 15^2$ ahonnan $r^2 = 225 - m^2$	1 pont
Az m magasságú torta térfogata $V = r^2\pi m = (225 - m^2)\pi m = 225\pi m - \pi m^3$ valóban.	2 pont
c)	
(A hosszúságokat cm-ben, a területeket cm ² -ben, a térfogatot cm ³ -ben adjuk meg.) A búra alatt elhelyezhető legnagyobb térfogatú tortát keressük. A $0 < m < 15$ nyílt intervallumon értelmezett $V(m) = 225\pi m - \pi m^3$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0. $V'(m) = \pi(225 - 3m^2)$.	1 pont
$225 - 3m^2 = 0$, azaz $m^2 = 75$, $m = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (ez eleme az értelmezési tartománynak).	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Ha $m^2 < 75$, akkor $V'(m) > 0$, ha $m^2 > 75$, akkor $V'(m) < 0$, ezért V -nek maximuma van, ha $m^2 = 75$.	1 pont
A maximális térfogatú forgáshenger magasságára $m = 5\sqrt{3} (\approx 8,66)$ alapkörének sugarára $r^2 = 225 - 75 = 150$ teljesül	1 pont
ezért a maximális térfogat $V_{max} = r^2 \pi m = 150\pi \cdot 5\sqrt{3} = 750\pi \cdot \sqrt{3} (\approx 4081)$	1 pont
A félgömb alakú búra térfogata $\frac{2 \cdot 15^3 \pi}{3} = 2250\pi (\approx 7069)$	1 pont
az alatta elhelyezhető legnagyobb torta térfogata ennek $\frac{750\pi \cdot \sqrt{3}}{2250\pi} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\approx \frac{4081}{7069} \right) \approx 0,577$ -szerese, ami valóban kisebb 0,6-nél. Az állítás tehát igaz.	1 pont

201

[Vissza a feladathoz.](#)

 Legyen H az $(x; 0)$ pont (ahol $-2 \leq x \leq 6$).	1 pont
Ekkor $\overrightarrow{PH} = (x; 0) - (-2; 0) = (x + 2; 0)$ és $\overrightarrow{RH} = (x; 0) - (0; 5) = (x; -5)$	1 pont
$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{RH} = (x + 2)x + 0 \cdot (-5) = x(x + 2)$	1 pont
$x(x + 2) = (x + 1)^2 - 1$, ezért az $f: x \mapsto x(x + 2)$, $-2 \leq x \leq 6$ függvénynek minimuma van -1-nél,	2 pont

(f a $[-2; -1]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, a $[-1; 6]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, $f(-2) = 0$ és $f(6) = 48 > 0$ ezért) a maximumát 6-nál veszi fel.	1 pont
A minimális skaláris szorzat a $H_1(-1; 0)$ ponthoz tartozik, a maximális pedig a $H_2 = Q(6; 0)$ ponthoz.	1 pont

202

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
Az utazások száma $100\,000 - 10 \cdot 1000 = 90\,000$ lenne naponta,	1 pont
a bliccelések száma ennek a 20%-a, vagyis 18 000, az érvényes jeggyel történő utazások száma pedig így $(90\,000 - 18\,000 =) 72\,000$.	2 pont
A napi bevétel ekkor $72\,000 \cdot 350 = 25\,200\,000$ tallér lenne.	1 pont
b)	
(A bevétel a fizető utasok számának és a vonaljegy árának a szorzata.) Ha az eredeti jegyárhoz képest $5x$ tallérral változik a vonaljegy ára, akkor a jegyár $300 + 5x$ tallér. (A tanulmányban alkalmazott modellben $-11 < x < 31$, ahol x egész szám.)	1 pont
Az utazások száma $100\,000 - 1000x$,	1 pont
a bliccelések száma pedig ennek a $(10 + x)$ %-a: $(100\,000 - 1000x) \cdot \frac{10+x}{100} = (1000 - 10x)(10 + x)$ lesz.	1 pont
A fizető utasok száma így: $100\,000 - 1000x - (1000 - 10x)(10 + x) = 10x^2 - 1900x + 90\,000$ fő.	2 pont
A jegyeladásból származó bevétel: $(10x^2 - 1900x + 90\,000)(300 + 5x) =$	1 pont
$= 50x^3 - 6500x^2 - 120\,000x + 27\,000\,000$ tallér.	1 pont
A $] -11; 31[$ nyílt intervallumon értelmezett $f(x) = 50(x^3 - 130x^2 - 2400x + 540\,000)$ függvény deriváltfüggvénye $f'(x) = 50(3x^2 - 260x - 2400)$.	1 pont
$f'(x) = 0$, ha $x \approx -8,41$ vagy $x \approx 95,08$, de ez utóbbi (az $x < 31$ feltétel miatt) nem lehetséges.	1 pont

A $-8,41$ helyen f' pozitívból negatívba megy át, (és $-8,41 < x < 31$ esetén negatív) ezért az f -nek $-8,41$ -nél maximuma van (előtte szigorúan monoton növekedő, utána pedig szigorúan monoton csökkenő).	1 pont
A feladatban x egész szám lehet csak, ezért még meg kell vizsgálni $f(-8)$ és $f(-9)$ értékét. $f(-8) = 27\,518\,400 > f(-9) = 27\,517\,050$,	1 pont
tehát a vonaljegy árát $(300 + 5 \cdot (-8) =) 260$ tallérban kell megállapítani. (Ekkor az utasok száma $108\,000$, a fizető utasok száma pedig $105\,840$ fő lenne.)	1 pont

203

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
A megadott átlagsebesség esetén $0,5 \cdot 60^2 - 65 \cdot 60 + 3800 = 1700$ kg/óra a szénfogyasztás.	1 pont
A 6100 kg szén tehát $6100 : 1700 (\approx 3,59)$ órára elegendő.	1 pont
Ennyi idő alatt kb. $(3,59 \cdot 60 \approx) 215$ km hosszúságú utat tesz meg a mozdony.	1 pont
b)	
Ha 1 óra alatt $0,5v^2 - 65v + 3800$ kg szénre van szükség, akkor a 6100 kg szén $\frac{6100}{0,5v^2 - 65v + 3800}$ órára elegendő.	1 pont
Ennyi idő alatt $\frac{6100v}{0,5v^2 - 65v + 3800}$ km távolságot tesz meg a mozdony.	1 pont
Az $s(v) = \frac{6100v}{0,5v^2 - 65v + 3800}$ ($50 < v < 100$) függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0 .	1 pont
$s'(v) = \frac{6100(0,5v^2 - 65v + 3800) - 6100v(v - 65)}{(0,5v^2 - 65v + 3800)^2} =$	2 pont
$= \frac{6100(0,5v^2 - 65v + 3800 - v^2 + 65v)}{(0,5v^2 - 65v + 3800)^2} = \frac{3050(7600 - v^2)}{(0,5v^2 - 65v + 3800)^2}$	1 pont
$s'(v) = 0$, ha $7600 - v^2 = 0$. Ebből ($v > 0$ miatt) $v = \sqrt{7600} \approx 87,2$ (és ez eleme az értelmezési tartománynak).	1 pont
A deriváltfüggvény értékei $v < \sqrt{7600}$ esetén pozitívak, $v > \sqrt{7600}$ esetén pedig negatívak. Ezért a $\sqrt{7600}$ az s függvénynek abszolút maximumhelye.	1 pont

A 6,1 tonna szénnel tehát kb. 87 km/h átlagsebesség esetén jut legmesszebbre a mozdony (kb. 275 km-re).	1 pont
---	--------