

Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek, függvények az emelt szintű matematika érettségiben

A feladatok megoldásait a feladat sorszámaúra kattintva találod meg.

241 | 2024. május idegen nyelvi 1./b

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$$

[7 pont]

242 | 2024. október 3./a

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$|2 \sin^2 x + 7 \sin x + 1| = 5$$

[8 pont]

231 | 2023. május 1./b

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$4 \sin^2 x - 16 \cos^2 x = -1$$

[7 pont]

221 | 2022. május 1./b

Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{1}{4} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{8} = 0$$

[5 pont]

222 | 2022. október 2./a

Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sin^2 x = 3 \cos^2 x$$

[6 pont]

211 | 2021. május 5./b

Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = \frac{3}{(1+\cos x)^2+2}$ függvény értékkészlete az $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ intervallum.

[5 pont]

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

201 | 2020. május 5./a, b, c

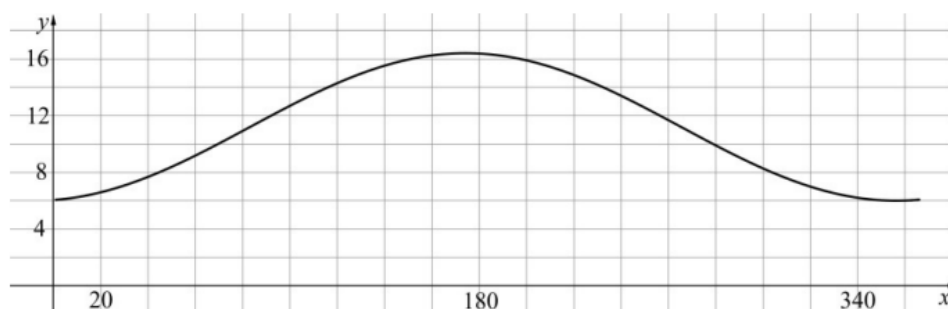
Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5,2 \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11,2$$

ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \leq n \leq 365, n \in \mathbf{N}$).

Az alábbi ábra a $g: [1; 365] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = -5,2 \cos\left(\frac{x+8}{58}\right) + 11,2$ függvényt szemlélteti.

(A g függvény az f -nek egy folytonos kiterjesztése.)



- a) Ha $x = 1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.

Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve!

[2 pont]

- b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!

Válaszát óra:perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!

[3 pont]

- c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

[7 pont]

Megoldások

241

[Vissza a feladathoz.](#)

Felhasználva, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: $2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$	1 pont
Nullára rendezve: $0 = 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2$.	1 pont
Az egyenlet $\cos x$ -ben másodfokú; megoldva: $\cos x = 2$ vagy $\cos x = -\frac{1}{2}$.	1 pont
Az első esetben nincs megoldás,	1 pont
a második esetben $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	2 pont
Ekvivalens átalakításokat végeztünk.	1 pont

242

[Vissza a feladathoz.](#)

I. eset: $2 \sin^2 x + 7 \sin x + 1 = 5$, azaz $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$.	1 pont
Az egyenlet $(\sin x)$ -ben másodfokú, gyökei 0,5 és -4.	1 pont
II. eset: $2 \sin^2 x + 7 \sin x + 1 = -5$ azaz $2 \sin^2 x + 7 \sin x + 6 = 0$.	1 pont
Az egyenlet $(\sin x)$ -ben másodfokú, gyökei -1,5 és -2.	1 pont
A négy gyök közül $(-1 \leq \sin x \leq 1$ miatt) csak a $\sin x = 0,5$ lehetséges,	1 pont
ekkor $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	2 pont
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont

231

[Vissza a feladathoz.](#)

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság felhasználásával $4(1 - \cos^2 x) - 16 \cos^2 x = -1$.	1 pont
$20 \cos^2 x = 5$ $\cos^2 x = \frac{1}{4}$	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.

Első eset: $\cos x = \frac{1}{2}$	1 pont
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$	1 pont
A négy gyök közül ($-1 \leq \sin x \leq 1$ miatt) csak a $\sin x = 0,5$ lehetséges,	1 pont
akkor $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$	2 pont
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért mindegyik kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont

221

[Vissza a feladathoz.](#)

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	1 pont
$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ vagy $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbf{Z}$	2 pont
$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ vagy $x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \pi, k \in \mathbf{Z}$	2 pont

222

[Vissza a feladathoz.](#)

$\cos x = 0$ nem megoldás (ekkor nem lehet $\sin x = 0$),	1 pont
ezért az egyenlet ekvivalens a $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3$, azaz a $\operatorname{tg}^2 x = 3$ egyenlettel.	1 pont
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ vagy $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	2 pont
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ esetén $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ esetén $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$	2 pont

211

[Vissza a feladathoz.](#)

Mivel $-1 \leq \cos x \leq 1$,	1 pont
ezért $0 \leq (1 + \cos x)^2 \leq 4$,	1 pont
$2 \leq (1 + \cos x)^2 + 2 \leq 6$	1 pont

(A pozitív számok halmazán az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért)	1 pont
$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{(1 + \cos x)^2 + 2} \geq \frac{1}{6}$	
Ebből következik, hogy	1 pont
$\frac{3}{2} \geq \frac{3}{(1 + \cos x)^2 + 2} \geq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	
tehát a megadott kijelentés valóban igaz (hiszen f folytonos függvény).	

201

[Vissza a feladathoz.](#)

a)	
$\frac{9}{58} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 8,89^\circ$	2 pont
b)	
$f(50) = -5,2 \cos(1) + 11,2$	1 pont
$f(50) \approx 8,39 \text{ óra}$	1 pont
Az 50. napon (körülbelül) 8:23 óra (8 óra 23 perc) hosszú a nappal.	1 pont
c)	
(Az $f(n) > 12$ megoldásai számának megállapításához) először a g függvény értelmezési tartományán oldjuk meg a $-5,2 \cos\left(\frac{x+8}{58}\right) + 11,2 = 12$ egyenletet ($1 \leq x \leq 365$, $x \in \mathbf{R}$). (Ekkor $0,16 \approx \frac{9}{58} \leq \frac{x+8}{58} \leq \frac{373}{58} \approx 6,43$.)	1 pont
$\cos\left(\frac{x+8}{58}\right) \approx -0,1538$	1 pont
$\frac{x+8}{58} \approx 1,7253 \text{ vagy } \frac{x+8}{58} \approx 2\pi - 1,7253 \approx 4,5579$	2 pont
Innen $x \approx 92,06$ vagy $x \approx 256,36$.	1 pont
A g függvény ábrája alapján az $f(n) > 12$ megoldásai azok az n -ek, amelyekre $93 \leq n \leq 256$.	1 pont
A 12 óránál hosszabb nappalok száma tehát $(256 - 93 + 1 =) 164$ valóban.	1 pont

Ezt a témakört [itt tudod gyakorolni](#) a matekingen.