A BINOMIÁLIS TÉTEL

1. Feladat.

Mennyi $(a+b)^7$-nél az a^2b^5-es tag együtthatója?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

azaz $a^{n-k}b^k$ együtthatója $\binom{n}{k}$.

Így megállapíthatjuk, hogy $k=5$ és $n-k=2$ esetén kapjuk meg az a^2b^5 együtthatóját a fenti képlet segítségével, továbbá az is leolvasható, hogy $n=7$, de ezt a fenti két adatból persze ki is számíthatnánk.

Meg van tehát minden adatunk, így nincs más dolgunk, mint a legelső képletbe visszahelyettesíteni $k=5$ és $n=7$-et, így a keresett együttható $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\mathbf{21}$. □

2. Feladat.

Mennyi $(a+2)^7$-nél az a^2-es tag együtthatója?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

azaz a^{n-k} együtthatója $\binom{n}{k} \cdot b^k$.

Így megállapíthatjuk, hogy $n-k=2$ esetén kapjuk majd meg az a^2 együtthatóját a fenti képlet segítségével. A képletből leolvasható az is, hogy $n=7$, innen pedig kiszámíthatjuk, hogy a most $b=2$ kitevője $k=5$ lesz.

Meg van tehát minden adatunk, így nincs más dolgunk, mint egyrészt a legelső képletbe visszahelyettesíteni $k=5$ és $n=7$-et, így az együttható egyik tényezője $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$.

De! Nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy az a^2 még meg van szorozva b^5-nel is, ami $b=2$-t helyettesítve $2^5 = 32$.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\mathbf{21\cdot 32 = 672}$. □

3. Feladat.

Mennyi $(x+3)^8$-nál az x^6-os tag együtthatója?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\text{azaz } a^{n-k} \text{ együtthatója } \binom{n}{k} \cdot b^k.$$

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a = x$ és $b = 3$-at.

Így megállapíthatjuk, hogy $n-k = 6$ esetén kapjuk majd meg az x^6 együtthatóját a fenti képlet segítségével. A képletből leolvasható az is, hogy $n = 8$, innen pedig kiszámíthatjuk, hogy a most $b = 3$ kitevője $k = 2$ lesz.

Meg van tehát minden adatunk, így nincs más dolgunk, mint egyrészt a legelső képletbe visszahelyettesíteni $k = 2$ és $n = 8$-at, így az együttható egyik tényezője $\binom{8}{2} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$.

De! Nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy az x^6 még meg van szorozva b^2-nel is, ami $b = 3$-at helyettesítve $3^2 = 9$.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\mathbf{28 \cdot 9 = 252}$. □

4. Feladat.

Mennyi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$-nél az első 3 tag együtthatójának összege?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\text{azaz } a^{n-k} b^k \text{ együtthatója } \binom{n}{k}.$$

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a = x$ és $b = \frac{1}{x}$-et. Ez most jelenleg csak abból a szempontból fontos nekünk, hogy észrevegyük azt, hogy így az első 3 tag (igazából az összes) együtthatója csak a binomiális együtthatótól fog függni.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{x^{10}}{x^k} \cdot \frac{1}{x^k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{x^{10-2k}}$$

Ebből az is leolvasható, hogy az első három tagot sorban a $k = 0,1,2$ helyettesítésekkel kapjuk meg.

Az első tag együtthatója a képletünk alapján $\binom{10}{0}$, a másodiké $\binom{10}{1}$, a harmadiké pedig $\binom{10}{2}$.

Így ezek összegét keressük, ami $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}=1+10+\frac{10!}{8!\cdot 2!}=11+\frac{9\cdot 10}{2}=11+45=56$

Összességében tehát a feladat megoldása: **56**.

□

5. Feladat.

Mennyi $(2x+3)^7$-nél az x^5-es tag együtthatója?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

azaz a^{n-k} együtthatója $\binom{n}{k}\cdot b^k$.

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a=2x$ és $b=3$-at.

Így megállapíthatjuk, hogy $n-k=5$ esetén kapjuk majd meg az x^5 együtthatóját a fenti képlet segítségével, viszont most vigyázzunk, hogy $a^5=(2x)^5=2^5\cdot x^5$ lesz, azaz nem szabad elfelejtenünk, hogy a keresett együtthatót $2^5=32$-vel is meg kell majd szoroznunk.

A képletből leolvasható az is, hogy $n=7$, innen pedig kiszámíthatjuk, hogy a most $b=3$ kitevője $k=2$ lesz.

Meg van tehát minden adatunk, így nincs más dolgunk, mint egyrészt a képletünkbe visszahelyettesíteni $k=2$ és $n=7$-et, így az együtthatónk egyik tényezője $\binom{7}{2}=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21$.

De! Nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy az x^5 még meg van szorozva b^2-nel is, ami $b=3$-at helyettesítve $3^2=9$.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\mathbf{32\cdot 21\cdot 9=6048}$.

□

6. Feladat.

Mennyi $(x-2y)^{13}$-nál az $x^{10}y^3$-as tag együtthatója?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\text{azaz } a^{n-k}b^k \text{ együtthatója } \binom{n}{k}.$$

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a = x$ és $b = -2y$-t.

Így megállapíthatjuk, hogy $n-k = 10$ és $k = 3$ esetén kapjuk majd meg az $x^{10}y^3$ együtthatóját a fenti képlet segítségével. A képletből leolvasható továbbá az is, hogy $n = 13$.

Meg van tehát minden adatunk, így nincs más dolgunk, mint egyrészt a legelső képletbe visszahelyettesíteni $k = 3$ és $n = 13$-at, így az együttható egyik tényezője $\binom{13}{3} = \frac{13!}{10!\cdot 3!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2\cdot 1} = 286$.

De! Nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy $b = -2y$ volt, ahonnét így a -2 még kiemelendő, emiatt $(-2)^3 = -8$-al még meg kell szoroznunk az együtthatót.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\mathbf{286} \cdot (\mathbf{-8}) = \mathbf{-2288}$.

□

7. Feladat.

Mennyi $(x-3y)^7$-nél az x^4y^3-as tag együtthatója?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\text{azaz } a^{n-k}b^k \text{ együtthatója } \binom{n}{k}.$$

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a = x$ és $b = -3y$-t.

Így megállapíthatjuk, hogy $n-k = 4$ és $k = 3$ esetén kapjuk majd meg az x^4y^3 együtthatóját a fenti képlet segítségével. A képletből leolvasható továbbá az is, hogy $n = 7$.

Meg van tehát minden adatunk, így nincs más dolgunk, mint egyrészt a legelső képletbe visszahelyettesíteni $k = 3$ és $n = 7$-at, így az együttható egyik tényezője $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$.

De! Nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy $b = -3y$ volt, ahonnét így a -3 még kiemelendő, emiatt $(-3)^3 = -27$-al még meg kell szoroznunk az együtthatót.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\mathbf{35 \cdot (-27) = -945}$.

$\square$

8. Feladat.

Mennyi $(x-2)^{10}$-nél az x^7-es tag együtthatója?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\text{azaz } a^{n-k} \text{ együtthatója } \binom{n}{k} \cdot b^k.$$

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a = x$ és $b = -2$-t.

Így megállapíthatjuk, hogy $n - k = 7$ esetén kapjuk majd meg az x^7 együtthatóját a fenti képlet segítségével. A képletből leolvasható az is, hogy $n = 10$, innen pedig kiszámíthatjuk, hogy a most $b = -2$ kitevője $k = 3$ lesz.

Meg van tehát minden adatunk, így nincs más dolgunk, mint egyrészt a legelső képletbe visszahelyettesíteni $k = 3$ és $n = 10$-et, így az együttható egyik tényezője $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$.

De! Nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy az x^7 még meg van szorozva b^3-nal is, ami $b = -2$-t helyettesítve $(-2)^3 = -8$.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\mathbf{120 \cdot (-8) = -960}$.

$\square$

9. Feladat.

Mennyi $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{20}$-nál az x^{17}-es tag együtthatója?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\text{azaz } a^{n-k} b^k \text{ együtthatója } \binom{n}{k}.$$

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a = x$ és $b = \frac{1}{x^2}$-et, és mivel most a keresett tag mind a-ban, mind b-ben bizonyos alakban előfordul, vizsgálnunk kell, hogyan állhat is elő az x^{17}-es tag.

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}x^{20-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}x^{20-k}x^{-2k}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}x^{20-3k}$$

Könnyen belátható, hogy csak $k=1$ esetén lesz az x kitevője 17, hiszen k növelésével szigorúan monoton csökkeni fog a kitevő.

A képletből leolvasható az is, hogy $n=20$, így megállapíthatjuk tehát, hogy csak $n-k=19$ esetén kapjuk majd meg az x^{17} együtthatóját a fenti képlet segítségével.

Meg van tehát minden adatunk, így nincs más dolgunk, mint egyrészt a legelső képletbe visszahelyettesíteni $k=1$ és $n=20$-at, így az együttható egyik tényezője $\binom{20}{1}=\frac{20!}{19!\cdot 1!}=\frac{20}{1}=20$.

Összességében tehát a feladat megoldása: **20**.

□

10. Feladat.

Mennyi n, ha $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ esetén az első 3 tag együtthatójának összege 92?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

azaz $a^{n-k}b^k$ együtthatója $\binom{n}{k}$.

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a=x$ és $b=\frac{1}{x}$-et. Ez most jelenleg csak abból a szempontból fontos nekünk, hogy észrevegyük azt, hogy így az első 3 tag (igazából az összes) együtthatója csak a binomiális együtthatótól fog függni.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{n-k}}{x^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}$$

Ebből az is leolvasható, hogy az első három tagot sorban a $k=0,1,2$ helyettesítésekkel kapjuk meg.

Az első tag együtthatója a képletünk alapján $\binom{n}{0}$, a másodiké $\binom{n}{1}$, a harmadiké pedig $\binom{n}{2}$.

Ezek alapján a következő egyenletet készíthetjük el.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=92$$

Alakítsuk át az összeg tagjait a következőképp.

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$

Így a következőképp egyszerűsödik az egyenletünk

$$1 + n + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 92$$

Szorozzunk 2-vel, hogy ne maradjon tört.

$$2 + 2n + (n-1) \cdot n = 184$$

Végül végezzük el a zárójelfelbontást, és vonjuk össze az azonos tagokat.

$$2 + 2n + n^2 - n = 184$$

$$n^2 + n - 182 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet, alkalmazzuk a megoldóképletet.

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-182)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 728}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-1 \pm 27}{2}$$

Azaz $n_1 = \frac{-1+27}{2} = \frac{26}{2} = 13$, illetve $n_2 = \frac{-1-27}{2} = \frac{-28}{2} = -14$.

Mivel n pozitív egész kell, hogy legyen, így ezek közül csak az $n = 13$ lehet jó megoldás.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{n = 13}$.

□

11. Feladat.

Mennyi n, ha $(x+3)^n$ esetén az első három tag együtthatójának összege 277?

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

azaz a^{n-k} együtthatója $\binom{n}{k} b^k$.

Helyettesítsünk a feladatnak megfelelően $a = x$ és $b = 3$-at, és vizsgáljuk, hogyan alakulnak az együtthatók.

$$(2x+3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \cdot x^{n-k}$$

Ebből az is leolvasható, hogy az első három tagot sorban a $k = 0{,}1{,}2$ helyettesítésekkel kapjuk meg.

Az első tag együtthatója a képletünk alapján:

$\binom{n}{0} 3^0 = 1 \cdot 1 = 1$

A második tag együtthatója:

$\binom{n}{1} 3^1 = n \cdot 3 = 3n$

A harmadik tag együtthatója pedig

$\binom{n}{2} 3^2 = \frac{(n-1)n}{2} \cdot 9 = 9 \cdot \frac{n^2 - n}{2}$

Ezek alapján a következő egyenletet készíthetjük el.

$$1 + 3n + 9 \cdot \frac{n^2 - n}{2} = 277$$

Szorozzuk meg 2-vel az egyenletünket, hogy ne maradjon tört.

$$2 + 6n + 9 \cdot (n^2 - n) = 554$$

Végül végezzük el a zárójelfelbontást, és vonjuk össze az azonos tagokat.

$$2 + 6n + 9n^2 - 9n = 554$$

$$9n^2 - 3n - 552 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet, alkalmazzuk a megoldóképletet.

$$n_{1,2} \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-552)}}{2 \cdot 9} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 19872}}{18} = \frac{3 \pm \sqrt{19881}}{18} = \frac{3 \pm 141}{18}$$

Azaz $n_1 = \frac{3+141}{18} = \frac{144}{18} = 8$, illetve $n_2 = \frac{3-141}{18} = \frac{-138}{18} = -\frac{23}{3}$.

Mivel n pozitív egész kell, hogy legyen, így ezek közül csak az $n = 8$ lehet jó megoldás.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{n = 8}$.

□