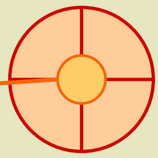
AZ ELOSZLÁSFÜGGVÉNY

Egy céltábla sugara 50 cm, a ξ valószínűségi változó jelentse azt, hogy milyen távol lőttünk a céltábla középpontjától. Tegyük föl, hogy **a céltáblát biztosan eltaláljuk**. A feladatunk az, hogy számítsuk ki először mondjuk a $P(\xi < 10)$ valószínűséget. Ez azt jelenti, hogy egy 10cm sugarú kör belsejébe találunk.

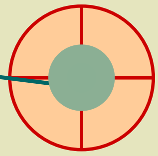
Ennek kiszámolása igazán egyszerű,



$$T = r^2\pi$$

$$P(\xi < 10) = \frac{t}{T} = \frac{10^2 \cdot \pi}{50^2 \cdot \pi} = 0{,}04$$

Hasonlóan izgalmas módon például



$$P(\xi < 20) = \frac{t}{T} = \frac{20^2 \cdot \pi}{50^2 \cdot \pi} = 0{,}16$$

Mekkora lehet ezek alapján általánosan a $P(\xi < x)$ valószínűség, ahol x valamilyen tetszőleges szám. Az eddigiek alapján úgy tűnik, hogy

$$P(\xi < x) = \frac{t}{T} = \frac{x^2 \cdot \pi}{50^2 \cdot \pi} = \frac{x^2}{2500}$$

Csakhogy sajnos ezzel adódnak bizonyos problémák. Nézzük meg ugyanis például, mi történik, ha x=-10. Hát egyrészt ugye $P(\xi < -10)$ azt jelenti, hogy lőttünk egyet a céltáblára, odamegyünk lemérni a távolságot, elővesszük a mérőszalagot és azt látjuk, hogy a lövés távolsága kevesebb, mint mínusz 10 centi. Nos nem tudom kinek milyen mérőszalagja van otthon, de ez ugye lehetetlen, tehát a valószínűség nulla: $P(\xi < -10) = 0$.
Ugyanakkor az előző kis képletünk azt mondja, hogy

$$P(\xi < x) = \frac{x^2}{2500} \quad \text{tehát} \quad P(\xi < -10) = \frac{(-10)^2}{2500} = 0{,}04$$

Vagy itt van mondjuk egy másik ügy, legyen x=60cm. Ez a valószínűség, hogy $P(\xi < 60)$ egészen biztosan 100%, mert ugye **a céltáblát biztosan eltaláljuk**, márpedig a céltábla sugara 50 cm, és nehéz lenne úgy eltalálni, ha távolabb lőnénk, mint 50 centi, vagyis tuti, hogy $\xi < 50$, ezért az pláne tuti, hogy $\xi < 60$.
A mi kis képletünk szerint, viszont

$$P(\xi < x) = \frac{x^2}{2500} \quad \text{tehát} \quad P(\xi < 60) = \frac{60^2}{2500} = 1{,}44$$

Ez egy picikét sok. A képlet tehát kisebb javítgatásra szorul.

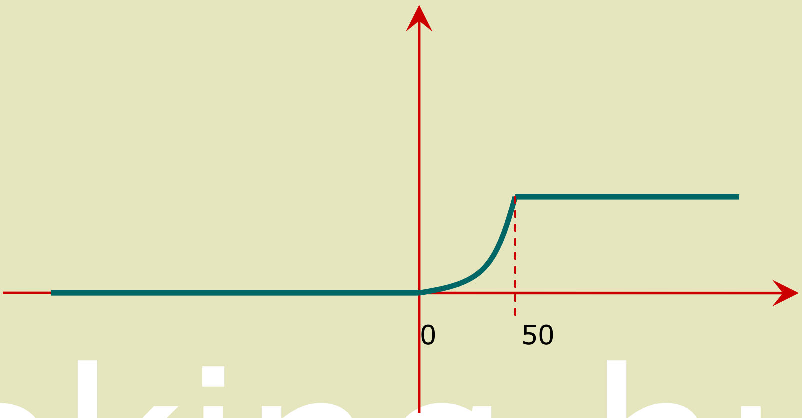
Arról van szó, hogy *normális* x-ekre jó eredményt ad képletünk, csak olyan idióta x-ekre nem, amikor x negatív, vagy pedig túl sok. Ezért csinálunk egy kikötést az x-re, és így kapjuk a jó képletet:

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2500} & ha \quad 0 < x \le 50 \\ 1 & ha \quad 50 < x \end{cases}$$

Ez, amit így kaptunk nem más, mint egy függvény. Az $x \mapsto P(\xi < x)$ hozzárendeléssel megadott függvény. Ezt a függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük, és $F(x)$-el jelöljük. Tehát a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = P(\xi < x)$

AZ F(x) ELOSZLÁSFÜGGVÉNY:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2500} & ha \quad 0 < x \le 50 \\ 1 & ha \quad 50 < x \end{cases}$$



Nézzünk meg egy másik nagyon izgalmas céltáblás esetet is. Ketten lőnek céltáblára. Az *A* találati esélye 0,7 a *B* találati esélye 0,8. Mindketten egy lövést adnak le egymástól függetlenül. Jelentse ξ a találatok számát és adjuk meg az eloszlásfüggvényt!

Az előző történetben ξ egy távolságot jelentett, ami 0cm és 50cm között bármi lehetett, most viszont a találatok számát, ami vagy 0 vagy 1 vagy 2 és semmi más nem lehet. Ezt a fajta valószínűségi változót diszkrétnek, míg az előzőt folytonosnak nevezzük. Itt az eloszlásfüggvényt úgy kapjuk meg, hogy készítünk egy eloszlástáblázatot:

találatok száma	valószínűség
0	$0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$
1	$0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38$
2	$0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$

EGYIK SEM TALÁL:
A nem talál: 1-0,7=0,3
B nem talál: 1-0,8=0,2

CSAK AZ EGYIK TALÁL:
A talál: 0,7
B nem talál: 1-0,8=0,2
vagy
A nem talál: 1-0,7=0,3
B talál: 0,8

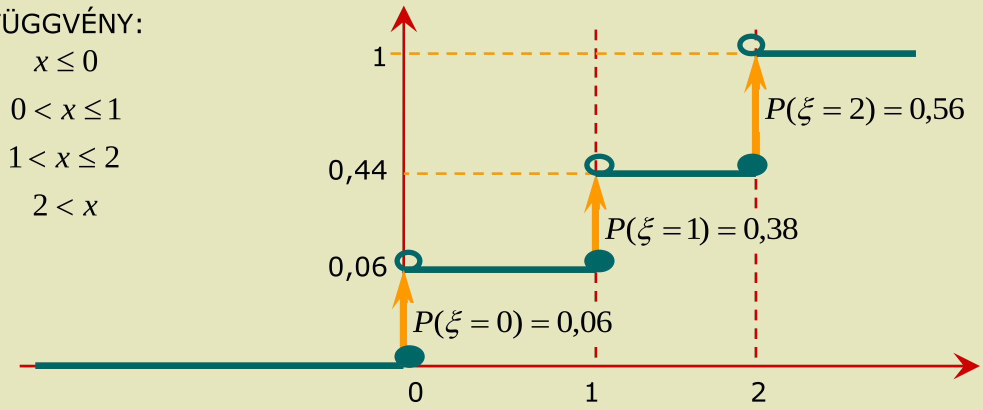
Az eloszlástáblázattal megvolnánk:

találatok száma	Valószínűség
0	0,06
1	0,38
2	0,56

Az eloszlásfüggvény itt egy lépcsőzetesen emelkedő függvény lesz:

AZ F(x) ELOSZLÁSFÜGGVÉNY:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ha \quad x\le 0 \\ 0{,}06 & ha \quad 0<x\le 1 \\ 0{,}44 & ha \quad 1<x\le 2 \\ 1 & ha \quad 2<x \end{cases}$$



Az eloszlásfüggvény tehát egy lépcsőzetes függvény lesz, ami minden számnál pontosan akkorát ugrik, mint az adott szám valószínűsége. Vagyis x=0 esetén az ugrás $P(\xi=0)=0{,}06$.
Aztán x=1 esetén megint ugrik, itt az ugrás $P(\xi=1)=0{,}38$, de ahogyan a rajzon is látszik ez hozzáadódik az előzőhöz.
Végül x=2 esetén az ugrás $P(\xi=2)=0{,}56$ ami szintén hozzáadódik az előzőhöz és így a függvény eléri az 1-et.

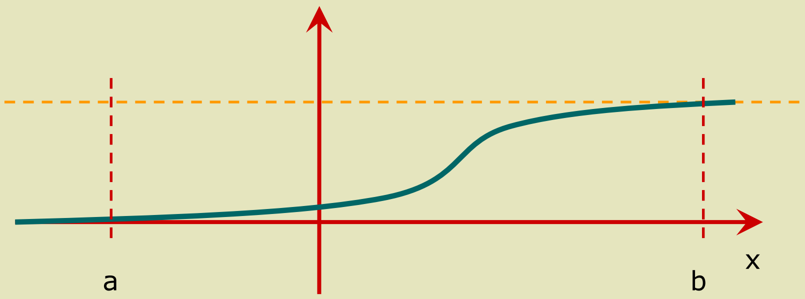
Folytonosnak nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik folytonos mennyiségeket mérnek, ilyen például az idő, a távolság. Ebben az esetben az eloszlásfüggvény mindig folytonos függvény lesz, ilyen volt az előző történet.

Diszkrétnek nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik megszámlálhatóan sok értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy vagy véges sokat, vagy végtelent, de úgy, hogy fel tudjuk sorolni az értékeit. Az egész számok például diszkrétnek számítanak, mert végtelen sokan vannak ugyan, de felsorolhatók: 1;2;3;4…

Ha a valószínűségi változó diszkrét, akkor az eloszlásfüggvény mindig egy lépcsőzetesen emelkedő függvény lesz, ami minden egyes x esetén éppen akkorát ugrik, mint amekkora az adott x valószínűsége.

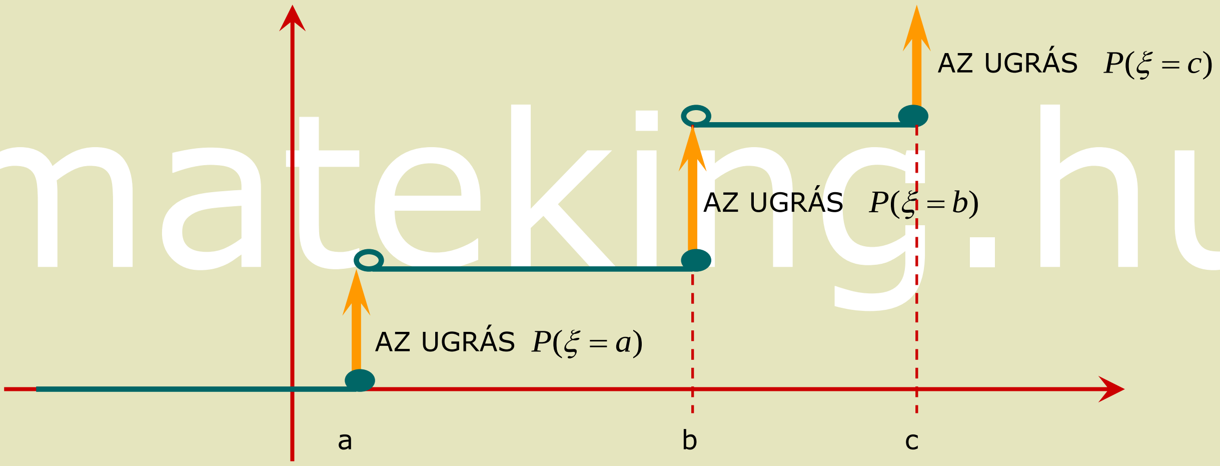
Mindezt foglaljuk össze.

FOLYTONOS VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ ELOSZLÁSFÜGGVÉNYE



A ξ valószínűségi változó folytonos, $a \le \xi \le b$ ahol *a* és *b* tetszőleges számok. A céltáblás esetben például *a*=0 és *b*=50, ezek között vehet fel értékeket a ξ.
Ilyenkor az eloszlásfüggvény is folytonos függvény, ami *a*-ig nullát vesz föl, *a* és *b* közt növekszik és *b* után végig egyet vesz föl. Vagyis ahol a ξ valószínűségi változó működik, ott a függvény életre kel, előtte és utána pedig hibernált állapotban van.

DISZKRÉT VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ ELOSZLÁSFÜGGVÉNYE

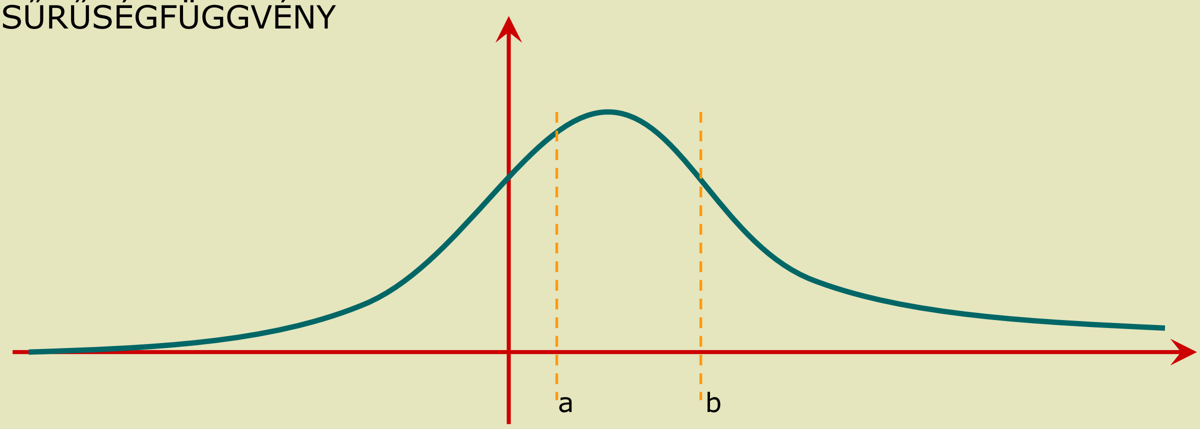


A ξ valószínűségi változó diszkrét és értékei: $\xi=a$; $\xi=b$; $\xi=c$; stb.
Ilyenkor az eloszlásfüggvény mindig egy lépcsőzetes függvény, ami minden számnál pontosan akkorát ugrik, mint az adott szám valószínűsége. Vagyis $x=a$ esetén az ugrás $P(\xi=a)$, aztán $x=b$ esetén az ugrás $P(\xi=b)$ és így tovább, és az ugrások összeadódnak.

Az eloszlásfüggvény tehát:

$$F(x)=\begin{cases} \mathbf{0} & ha \quad x \le a \\ P(\xi=a) & ha \quad a < x \le b \\ P(\xi=a)+P(\xi=b) & ha \quad b < x \le c \\ \dots & \\ \mathbf{1} & \end{cases}$$

A SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY



A sűrűségfüggvény jele f(x) és úgy működik, hogy a valószínűségek a görbe alatti területek lesznek.
Vagyis

$$P(a<\xi<b)=\int_a^b f(x)dx$$

Az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény kapcsolata egészen izgalmas.
Eloszlásfüggvényből sűrűségfüggvényt úgy kapunk, hogy az eloszlásfüggvényt deriváljuk:

$$f(x)=F'(x)$$

Sűrűségfüggvényből pedig úgy lesz eloszlásfüggvény, ha integráljuk, de meglehetősen trükkös módon:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

AZ ELOSZLÁSFÜGGVÉNY ÉS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI:

***F(x)* eloszlásfüggvény tulajdonságai:** I. $\lim_{-\infty} F(x)=0$ II. $\lim_{\infty} F(x)=1$ III. Monoton nő IV. Balról folytonos	Adott *F(x)* eloszlásfüggvény, kell *f(x)* sűrűségfüggvény: $f(x)=F'(x)$
***f(x)* sűrűségfüggvény tulajdonságai:** I. Nem negatív II. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$	Adott *f(x)* sűrűségfüggvény, kell *F(x)* eloszlásfüggvény: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

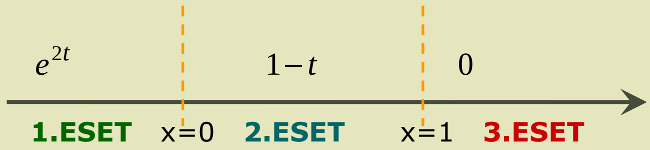
SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYBŐL ELOSZLÁSFÜGGVÉNY

Adott a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, állítsuk elő az eloszlásfüggvényt!

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & ha \quad x \le 0 \\ 1-x & ha \quad 0<x\le 1 \\ 0 & ha \quad 1<x \end{cases}$$

A képlet alapján:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



1.ESET $x \le 0$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} e^{2t}\,dt=\left[e^{2t}\cdot\frac{1}{2}\right]_{-\infty}^{x}=e^{2x}\cdot\frac{1}{2}-0=\boxed{\frac{1}{2}e^{2x}}$$

x=0

2.ESET $0<x\le 1$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt=\frac{1}{2}e^{0}+\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}=\boxed{\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}}$$

x=1

3.ESET $1<x$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt+\int_{1}^{x}0\,dt=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+0=\boxed{1}$$

Az eloszlásfüggvény:

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x} & ha \quad x\le 0 \\ \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2} & ha \quad 0<x\le 1 \\ 1 & ha \quad 1<x \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvényből a sűrűségfüggvényt úgy kapjuk vissza, ha a F(x) eloszlásfüggvényt deriváljuk. Ez a művelet már meglehetősen ártalmatlan, így mindenki próbálja ki otthon.

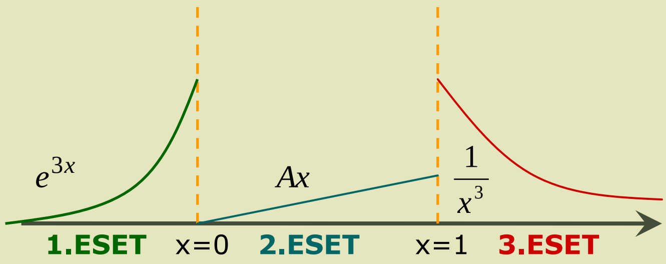
SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAINAK TESZTELÉSE

Ellenőrizzük, hogy lehet-e a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az alábbi függvény!

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & ha \quad x<0 \\ Ax & ha \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^3} & ha \quad 1 < x \end{cases}$$

f(x) akkor sűrűségfüggvény, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \boxed{\int_{-\infty}^{0} e^{3x}dx} + \boxed{\int_{0}^{1} Ax\ dx} + \boxed{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}dx} = \left[e^{3x}\cdot\frac{1}{3}\right]_{-\infty}^{0} + \left[A\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{1}^{\infty} = \frac{1}{3} + A\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ekkor A=1/3

ELOSZLÁSFÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAINAK TESZTELÉSE

Ellenőrizzük, hogy lehet-e a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az alábbi függvény!

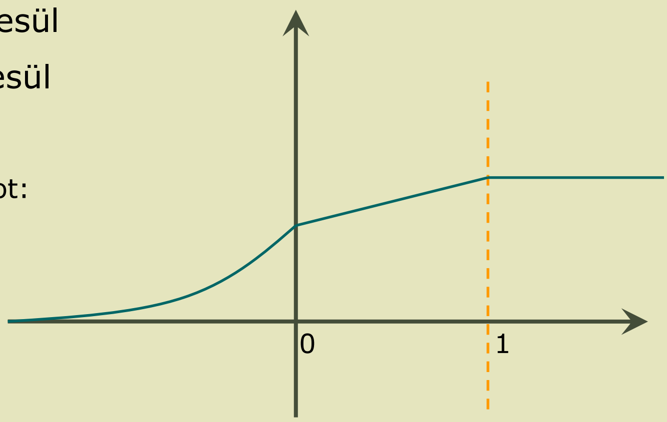
$$F(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & ha \quad x<0 \\ \dfrac{x+1}{2} & ha \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & ha \quad 1 < x \end{cases}$$

Lássuk az eloszlásfüggvény négy tulajdonságát!

I. $\lim\limits_{-\infty} F(x) = 0$ most $\lim\limits_{-\infty} 2^{x-1} = 0$ ez teljesül

II. $\lim\limits_{\infty} F(x) = 1$ most $\lim\limits_{\infty} 1 = 1$ ez is teljesül

III. Monoton nő
IV. Balról folytonos
} Készítünk egy rajzot:



Nos úgy tűnik ezek is rendben vannak, tehát F(x) eloszlásfüggvény.