FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKÉNEK KISZÁMOLÁSA

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = ?$$

Véges helyen vett határérték

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Ilyenkor az első lépés, hogy helyettesítsük be a függvénybe az a-t.
Ha amit így kapunk értelmezhető, akkor kész is vagyunk, az a szám a határérték*.
Ha amit kapunk nem értelmezhető, akkor az alábbi esetek lehetnek

Végtelenben vett határérték

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \text{ vagy } \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Ilyenkor tökugyanazt kell csinálni, mint amit a sorozatok határértékének a kiszámolásánál.

$$\frac{0}{0}$$

SZORZATTÁ ALAKÍTJUK AKI NULLA

$$\frac{szám}{0}$$

egyéb

VALAMIT ITT IS CSINÁLUNK
de nyugi, ilyen nem szokott lenni

A $\frac{0}{0}$ esetben, ahol mindkettő nulla a számlálót is és a nevezőt is szorzattá alakítjuk.

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) \cdot valami}{(x-a) \cdot izé}$$

A $\frac{szám}{0}$ esetben pedig, ahol csak a nevező nulla, ott csak a nevezőt alakítjuk szorzattá.

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{valami}{(x-a) \cdot izé} = \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \cdot \frac{valami}{izé}$$

*Ez csak folytonos függvényekre igaz, de a feladatok készítőinek fantáziája szerencsére megragadt ezeknél.

4.1. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-16x+55}{4x^2-16x-20}=?$

4.2. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{3x^2+4x-15}=?$

4.3. $\lim_{x\to 4} \frac{16x^2-x^4}{4x^3-16x^2}=?$

4.4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^4-16}=?$

4.5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+7x+12}{4x^2-16x+12}=?$

4.6. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2+1}{x^2-25}=?$

4.7. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+5}{(x-4)^2}=?$

4.8. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}=?$

FOLYTONOSSÁG

DEFINÍCIÓ: Az $f(x)$ függvény folytonos az a helyen, ha értelmezve van az a helyen, létezik és véges a határértéke az a helyen és

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

DEFINÍCIÓ: Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a helyen, ha értelmezve van az a helyen és létezik véges a határértéke az a helyen.

4.9. Folytonos-e a következő függvény az $x=\frac{1}{4}$ helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \frac{4x^2-9x+2}{4x^2-x} & , \ ha \ x\in R-\left\{0;\frac{1}{4}\right\} \\ -7 & , \ ha \quad x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

4.10. Megadható-e az *A* szám értéke úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=3 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-6x+9}{x^2-x-6} & , \ ha \ x\in R-\{-2;3\} \\ A & , \ ha \quad x=3 \end{cases}$$

4.11. Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az x=-4 és x=3 helyen?

$$f(x)=\frac{(x+4)\cdot(12x-4x^2)}{(x+4)\cdot(3-x)^4}$$

4.12. Folytonos-e a következő függvény az $x=\frac{2}{3}$ helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x^2-2x}{3x^2+x-2} & , \ ha \ x\in R-\left\{-1;\frac{2}{3}\right\} \\ 2 & , \ ha \quad x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

4.13. Folytonos-e a következő függvény az x=1 és x=6 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x-18}{2x-12} & , \ ha \ x\in R-\{1;6\} \\ 5 & , \ ha \quad x=1 \\ \dfrac{9}{2} & , \ ha \quad x=6 \end{cases}$$

4.14. Folytonos-e a következő függvény az x=3 és x=4 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-x-24}{x^2-7x+12} & , \ ha \ x\in R-\{3;4\} \\ 7 & , \ ha \quad x=3 \\ \dfrac{5}{4} & , \ ha \quad x=4 \end{cases}$$

4.15. Folytonos-e az alábbi függvény az x=2 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \ ha \ x\le 2 \\ 2-3x & , \ ha \quad x>2 \end{cases}$$

4.16. Megadható-e az A szám értéke úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=1 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{Ax^2-Ax}{2x^2-5x+3} & , \ ha \ x<1 \\ \sqrt{x^3+x+7} & , \ ha \quad x\ge 1 \end{cases}$$

4.17. Megadható-e úgy A és B szám értéke, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=2 és x=5 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-8x+4}{x^2-7x+10} & , \ ha \ x\in R-\{2;5\} \\ A & , \ ha \quad x=2 \\ B & , \ ha \quad x=5 \end{cases}$$

4.18. Megadható-e úgy A és B paraméter értéke, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=-2 és x=3 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-12}{x^2-x-6} & , \ ha \ x\in R-\{-2;3\} \\ A & , \ ha \quad x=-2 \\ B & , \ ha \quad x=3 \end{cases}$$

4.19. Megadható-e A és B úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=0 és x=4 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^3-x^4}{x^3-3x^2-4x} & , \ ha \ x\in R-\{0;4\} \\ A & , \ ha \quad x=0 \\ B & , \ ha \quad x=4 \end{cases}$$

$$\lim_{\pm\infty} f(x)=?$$

4.20. Megadható-e úgy A és B paraméterek értéke, hogy az alábbi függvény ne legyen folytonos az x=3 és x=4 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{16x^2-x^4}{x^2-7x+12} & , \ ha \ x\in R-\{3;4\} \\ A & , \ ha \quad x=3 \\ B & , \ ha \quad x=4 \end{cases}$$

$$\lim_{\pm\infty} f(x)=?$$

4.21. Megadható-e úgy A és B paraméterek értéke, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=-3 és x=4 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^2-36}{Ax^2-Ax-12A} & , \ ha \ x\in R-\{-3;4\} \\ 10 & , \ ha \quad x=-3 \\ B & , \ ha \quad x=4 \end{cases}$$

4.22. Megadható-e úgy A és B paraméterek értéke, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=3 és x=4 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{9Ax-Ax^3}{2x^2-14x+24} & , \ ha \ x\in R-\{3;4\} \\ 3-A & , \ ha \quad x=3 \\ \dfrac{B}{x} & , \ ha \quad x=4 \end{cases}$$

4.23. Megadható-e az *A* szám értéke úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=1 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x^4}{x^3-1} & , \ ha \ x\in R-\{1\} \\ A & , \ ha \quad x=1 \end{cases}$$

$$\lim_{\pm\infty} f(x)=?$$

4.24. Megadható-e az *A* szám értéke úgy, hogy az alábbi függvény ne legyen folytonos az x=2 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x^3-8} & , \ ha \ x\in R-\{2\} \\ A & , \ ha \quad x=2 \end{cases}$$

4.25. Megadható-e úgy az A paraméter értéke, hogy az alábbi függvény folytonossá tehető legyen az x=4 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x-20}{x^2-9x+20} & , \ ha\ x<4 \\ A\cdot\dfrac{8x^2-2x^3}{x^4-16x^2} & , \ ha \quad x>4 \end{cases}$$

4.26. Megadható-e úgy az A paraméter értéke, hogy az alábbi függvénynek létezzen határértéke az x=3 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+x-30}{x^2-10x+21} & , \ ha\ x<3 \\ A\cdot\dfrac{9x^2-3x^3}{x^4-3x^3} & , \ ha \quad x>3 \end{cases}$$

4.27. Megadható-e úgy az A paraméter értéke, hogy az alábbi függvény folytonos legyen az x=-5 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+5x-25}{x^2+x-20} & ha \quad x<-5 \\ a+\operatorname{sgn} x & ha \quad x=-5 \\ \dfrac{x^3-25x}{4x+20} & ha \quad -5<x \end{cases}$$

4.28. Folytonos-e a következő függvény az x=3 és x=4 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-3)^4\cdot(x-4)^3}{(x^2-16)^2\cdot(x-3)^6} & , \ ha\ x\in R-\{3;4\} \\ 12 & , \ ha \quad x=3 \\ \dfrac{1}{4} & , \ ha \quad x=4 \end{cases}$$

4.29. Folytonossá tehető-e a következő függvény az x=-4 és x=5 helyen?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-x-20)\cdot(x+5)^2\cdot(x+4)^3}{(x+4)^4\cdot(x^2-25)^4} & , \ ha\ x\in R-\{-4;5\} \\ A & , \ ha \quad x=-4 \\ B & , \ ha \quad x=5 \end{cases}$$

Teendők egyéb $\dfrac{0}{0}$ esetben

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{IZÉ\to 0}\frac{\sin IZÉ}{IZÉ}=1 \qquad \lim_{IZÉ\to 0}\frac{1-\cos IZÉ}{IZÉ^2}=\frac{1}{2}$$

ha a szinuszban 2x van, de a nevezőben csak x, akkor cselhez kell folyamodni.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 4}\frac{2\sin 2x}{2x}=1$$

először leosztunk x-el, aztán tömegesen alkalmazzuk az előző cselt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{5x+\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}{5+\frac{\sin 4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{2}\frac{\sin 2x}{\boldsymbol{2}x}+\boldsymbol{3}\frac{\sin 3x}{\boldsymbol{3}x}}{5+\boldsymbol{4}\frac{\sin 4x}{\boldsymbol{4}x}}=\frac{\boldsymbol{2}\cdot 1+\boldsymbol{3}\cdot 1}{5+\boldsymbol{4}\cdot 1}=\frac{5}{9}$$

4.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 4x}{4x^2-16\sin 3x}=?$

4.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-\sin^2 x}{4\sin\left(9x^2\right)-5x\cdot\sin x}=?$

4.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-16x\sin x}{1-\cos x+\sin^2 x}=?$

4.33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg\,3x}{4\sin x-x\cdot\sin 3x}=?$

4.34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+tgx+tg\,2x}{x+\sin 4x}=?$

4.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=?$

4.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{tg^2 x}=?$

4.37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{2\sin x-\sin^3 x-\sin 2x}=?$

4.38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1+\cos x}{5x^2-\sin^2 4x}=?$

4.39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x-\sin^2 x}{x^3}=?$

4.40. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+ctg^2 x\right)^{tg^2 x}=?$

4.41. Folytonos-e az alábbi függvény az $x_0=0$ helyen?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{x^2+\sin 3x} & ha \quad x\neq 0\\ 5 & ha \quad x=0\end{cases}$$

4.42. Milyen *A* szám esetén folytonos az alábbi függvény az $x_0=0$ helyen?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{tgx+\sin 2x}{x+\sin x} & ha \quad x\neq 0\\ A & ha \quad x=0\end{cases}$$

4.43. Milyen *A* szám esetén folytonos az alábbi függvény az $x_0 = 0$ helyen?

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & ha \quad x \neq 0 \\ A & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

4.44. Milyen *A* szám esetén folytonos az alábbi függvény az $x_0 = 0$ helyen?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \sin x}{tgx} & ha \quad x < 0 \\ A & ha \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 3x} & ha \quad x > 0 \end{cases}$$

4.45. Milyen *A* szám esetén folytonos az alábbi függvény az $x_0 = 0$ helyen?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^x} & ha \quad x \neq 0 \\ A & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

4.46. Milyen *A* szám esetén folytonos az alábbi függvény az $x_0 = 0$ helyen?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{-1}{x}}} & ha \quad x \neq 0 \\ A & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

4.47. Milyen *A* és *B* szám esetén folytonos az alábbi függvény a teljes számegyenesen?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{3x + 3} & ha \quad x < -1 \\ Ax + B & ha \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x - \sin 2x1}{x + \sin x} & ha \quad 0 < x \end{cases}$$

4.48. Milyen *A* szám esetén folytonos az alábbi függvény az $x_0 = 0$ helyen?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + \sin^2 x}{x^3 - tg(4x^2)} & ha \quad x < 0 \\ A & ha \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2 - \sin(3x^2)}{\sin^2 2x + 3x} & ha \quad x > 0 \end{cases}$$

4.49. Milyen *A* szám esetén folytonos az alábbi függvény az $x_0 = 4$ helyen?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-4) + x^2 - 16}{tg(x^2 - 16)} & ha \quad x < 4 \\ 12A & ha \quad x = 4 \\ -24\dfrac{16x^2 - 4x^3}{x^4 - 64} & ha \quad x > 4 \end{cases}$$

L'HOSPITAL SZABÁLY (A CSODAFEGYVER)

HA $f(x)$ ÉS $g(x)$ DERIVÁLHATÓ α EGY KÖRNYEZETÉBEN ÉS A $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ HATÁRÉRTÉK $\frac{0}{0}$ VAGY $\frac{\infty}{\infty}$ TÍPUSÚ, VALAMINT LÉTEZIK A $\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ HATÁRÉRTÉK, AKKOR $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

A L'Hospital szabály segítségével azokat a határértékeket, amikkel eddig szenvedtünk, most rettentő gyorsan ki tudjuk számolni. Egyetlen bökkenő az, hogy kell tudni deriválni.

LÁSSUNK NÉHÁNY PÉLDÁT!

deriváljuk

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-9x+20}{x^2-x-12}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 4}\frac{2x-9}{2x-1}=\frac{-1}{7}$$

deriváljuk

---

deriváljuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{5x+\sin 4x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 2+\cos 3x\cdot 3}{5+\cos 4x\cdot 4}=\frac{1\cdot 2+1\cdot 3}{5+1\cdot 4}=\frac{5}{9}$$

deriváljuk

---

deriváljuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{arctgx+\sin x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{\frac{1}{1+x^2}+\cos x}=\frac{1+0}{1+1}=\frac{1}{2}$$

deriváljuk

---

deriváljuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\ln\cos x}{e^{\sin x}-\cos x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{e^{\sin x}\cdot\cos x+\sin x}=\frac{1+1\cdot 0}{1\cdot 1+0}=1$$

deriváljuk

Az is lehet, hogy x nem egy konkrét számhoz tart, hanem mondjuk végtelenbe, a L'Hospital szabály ilyen esetekben is remekül használható.

4.50. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x+\sin x}=?$

4.51. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\ln x+x-1}=?$

4.52. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2x}{\sqrt{x+3}-2x^2}=?$

4.53. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x^2}{\ln\left(e^x-1\right)}=?$

4.54. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x-\sin x+\sin^3 x}=?$

4.55. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\cdot\ln\left(x^3+x\right)=?$

4.56. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x\cdot\ln x}{e^x+x}=?$

4.57. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)=?$

4.58. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=?$

4.59. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+\cos x-1}\right)=?$

L'HOSPITAL SZABÁLY TOVÁBBI ALKALMAZÁSAI

A L'Hospital szabály használható rendkívül cseles 0^0 és ∞^0 határértékekre is.
Ehhez mindössze a logaritmus definíciójában kell elmélyednünk egy csöppet:

$$BÁRMI = e^{\ln BÁRMI}$$

Ezt az átalakítást alkalmazva

$$\lim_{x\to 0}x^x=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(x^x\right)}$$

először kiszámoljuk a kitevő hova tart:

$$\lim_{x\to 0}\ln x^x=\lim_{x\to 0}x\ln x=\mathbf{0}$$

amit aztán visszarakunk:

$$\lim_{x\to 0}x^x=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(x^x\right)}=e^{\mathbf{0}}=1$$

4.60. $\lim\limits_{x\to 0}x^{2x}=?$

4.61. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=?$

4.62. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\ln(1+x)}=?$

4.63. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}=?$

4.64. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\sin x}=?$

4.65. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x^2\right)^{\ln(1+x)}=?$