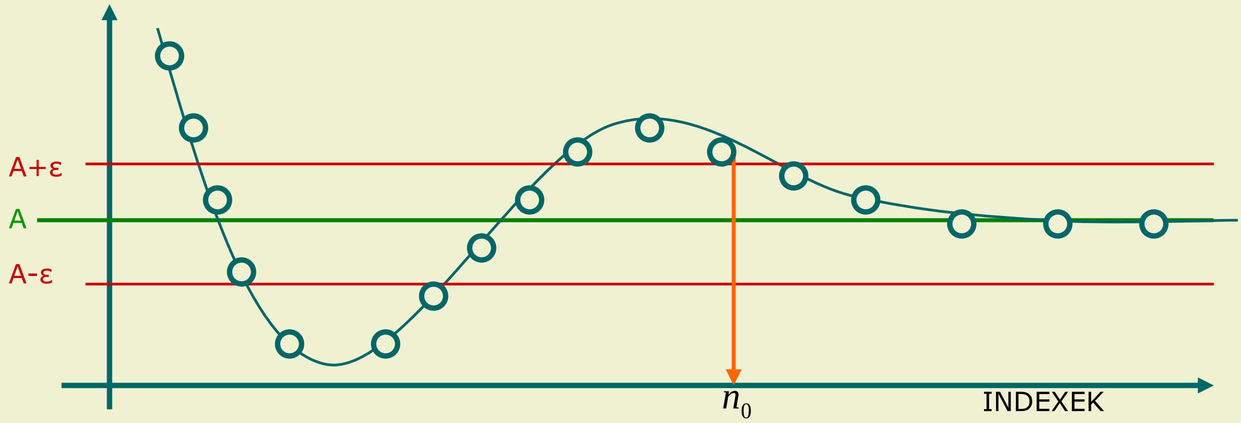
A SOROZATOK HATÁRÉRTÉKÉNEK DEFINÍCIÓJA

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy minden $n > n_0$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.
Vagyis nagy n-ekre a sorozat már ε-nál közelebb kerül a határértékéhez.



Számítsuk ki az $\varepsilon = 10^{-2}$-hoz tartozó n_0 küszöbindexet.

$$a_n = \frac{2n+3}{5n-1} \to \frac{2}{5}$$

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2n+3}{5n-1} - \frac{2}{5}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{(2n+3)\cdot 5 - 2\cdot(5n-1)}{(5n-1)\cdot 5}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{17}{25n-5}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{17}{25n-5} < \frac{1}{100}$$

$$1700 < 25n - 5$$

$$1705 < 25n$$

$$68{,}2 < n$$

$$n_0 = 68$$

$$b_n = \frac{2n^2+4}{10-n^2} \to -2$$

$$|b_n - B| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2n^2+4}{10-n^2} + 2\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{2n^2+4+2\cdot(10-n^2)}{10-n^2}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{24}{10-n^2}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{24}{n^2-10} < \frac{1}{100}$$

$$2400 < n^2 - 10$$

$$2410 < n^2$$

$$49{,}09 < n$$

$$n_0 = 49$$

az abszolútérték felbontása után a nevező legnagyobb kitevőjű tagja mindig + kell, hogy legyen.

HA + VOLT, AZ IS MARAD

HA – VOLT, AKKOR + LESZ

mateking.hu

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+3} \to 0$$

Adjuk meg az ε-hoz tartozó n_0 küszöbindexet!

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n+1}{n^2+3} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{n+1}{n^2+3} < \varepsilon$$

Nem bajlódunk itt a másodfokú kifejezésekkel, hanem megbecsüljük a törtet felülről. A számlálóban mindenkit a legnagyobb nagyságrendű tagra cserélünk, a nevezőben csak a legnagyobb nagyságrendű tagot hagyjuk meg.

$$\overbrace{\frac{n+1}{n^2+3} \le \frac{n+n}{n^2}}\, = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \quad n_0 = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor$$

$$a_n = \frac{n^3-3n}{n^3+n^2+1} \to 1$$

Adjuk meg az ε-hoz tartozó n_0 küszöbindexet!

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n^3-3n}{n^3+n^2+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n^3-3n}{n^3+n^2+1} - \frac{n^3+n^2+1}{n^3+n^2+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-n^2-3n-1}{n^3+n^2+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{n^2+3n+1}{n^3+n^2+1} < \varepsilon$$

Itt is a törtet felülről becsüljük. A számlálóban mindenkit a legnagyobb nagyságrendű tagra cserélünk, a nevezőben csak a legnagyobb nagyságrendű tagot hagyjuk meg.

$$\overbrace{\frac{n^2+3n+1}{n^3+n^2+1} \le \frac{n^2+3n^2+n^2}{n^3}}\, = \frac{5n^2}{n^3} = \frac{5}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \quad n_0 = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} \right\rfloor$$

$$a_n = \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}} \to 3$$

Adjuk meg az ε-hoz tartozó n_0 küszöbindexet!

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left| \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}} - 3 \right| < \varepsilon$$

gyöktelenítünk

mateking.hu

$$\left|\frac{\left(\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}}-3\right)\left(\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}}+3\right)}{\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}}+3}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\frac{9n^2+1}{n^2+n}-9}{\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}}+3}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\frac{9n^2+1}{n^2+n}-\frac{9n^2+9n}{n^2+n}}{\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}}+3}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\frac{-9n+1}{n^2+n}}{\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}}+3}\right|<\varepsilon$$

Megbecsüljük a törtet felülről. A számlálóban mindenkit a legnagyobb nagyságrendű tagra cserélünk, a nevezőben csak a legnagyobb nagyságrendű tagot hagyjuk meg.

mateking.hu

$$\frac{\frac{9n-1}{n^2+n}}{\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}}+3}\le\frac{\frac{9n-1}{n^2+n}}{3}\le\frac{\frac{9n}{n^2}}{3}=\frac{3}{n}<\varepsilon\Rightarrow\frac{3}{\varepsilon}<n\quad\Rightarrow\quad n_0=\left\lfloor\frac{3}{\varepsilon}\right\rfloor$$

$$a_n=\frac{n^3+6n}{n^2+10}\to\infty$$

Adjuk meg az K-hoz tartozó n_0 küszöbindexet!

$$a_n>K$$

$$\frac{n^3+6n}{n^2+10}>K$$

$$\frac{n^3+6n}{n^2+10}\ge\frac{n^3}{n^2+10n^2}=\frac{n^3}{11n^2}=\frac{n}{11}>K\Rightarrow n>11K\quad\Rightarrow\quad n_0=\lfloor 11K\rfloor$$

Számítsuk ki az $\varepsilon = 10^{-2}$-hoz tartozó n_0 küszöbindexet.

$$a_n = \frac{2^n + 3}{2^{n+1} - 10} \to \frac{1}{2}$$

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2^n + 3}{2 \cdot 2^n - 10} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{(2^n + 3) \cdot 2 - (2 \cdot 2^n - 10)}{(2 \cdot 2^n - 10) \cdot 2} \right| < \frac{1}{100}$$

összevonunk:

$$\left| \frac{16}{4 \cdot 2^n - 20} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{16}{4 \cdot 2^n - 20} < \frac{1}{100}$$

$$1600 < 4 \cdot 2^n - 20$$

$$1620 < 4 \cdot 2^n$$

$$405 < 2^n$$

Mindkét oldalnak vesszük a logaritmusát

$$\ln 405 < \ln 2^n$$

$$\ln 405 < n \cdot \ln 2$$

$$\frac{\ln 405}{\ln 2} < n$$

$8{,}66 < n$ és $n_0 = 8$

a számláló nagy n-ek esetén* negatív, ezért felbontás után a (-1)szerese lesz

a nevező nagy n-ek esetén* pozitív, ezért a felbontás után sajátmaga marad

$$b_n = (-1)^n \frac{4 - n}{n^2 - 12} \to \begin{cases} PS & 1 \cdot 0 = 0 \\ PL & -1 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$$|b_n - B| < \varepsilon$$

$$\left| (-1)^n \frac{4 - n}{n^2 - 12} - 0 \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| (-1)^n \frac{4 - n}{n^2 - 12} \right| < \frac{1}{100}$$

$(-1)^n$ az abszolútérték miatt eltűnik

$$\left| \frac{4 - n}{n^2 - 12} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{-4 + n}{n^2 - 12} < \frac{1}{100}$$

$$-400 + 100n < n^2 - 12$$

$$0 < n^2 - 100n + 388$$

$$n = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 388}}{2}$$

Mindig a nagyobbik lesz az n_0

$$n_0 = 95$$

* nagy n, mondjuk n=egymillió

mateking.hu

Számítsuk ki definíció szerint az alábbi sorozatok határértékét és adjunk $\varepsilon = 10^{-2}$ -hoz n_0 küszöbindexet.

2.1. $a_n = \dfrac{2n+7}{5n+2}$

2.2. $a_n = \dfrac{3n^2+5n}{5n^2+2n}$

2.3. $a_n = \dfrac{n+3}{2n-7}$

2.4. $a_n = \dfrac{2n^2+3}{10-n^2}$

Vizsgáljuk meg konvergencia, monotonitás, korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat! Konvergencia esetén adjuk meg az $\varepsilon = 10^{-2}$ -hoz tartozó n_0 -t.

2.5. $a_n = \dfrac{3n^2-7}{2n^2+5}$

2.6. $a_n = \dfrac{n^2+n}{2n^2+1}$

2.7. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+1}$

2.8. $a_n = (-1)^n \dfrac{3n+2}{n+3}$

2.9. $a_n = (-1)^n \dfrac{3n+5}{n+1}$

2.10. $a_n = (-1)^n \dfrac{5}{n^2+1}$

2.11. $a_n = \dfrac{3n^3+8}{2n^3+13}$

2.12. $a_n = \dfrac{4^{n+1}-1}{2^{2n}}$

2.13. $a_n = \dfrac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}$

2.14. $a_n = \dfrac{7n^2-1}{7n^2+1}$

2.15. $a_n = \dfrac{4^{n+1}-5}{2^{2n+1}+1}$

2.16. $a_n = \dfrac{2^{2n+1}}{4^{n+1}+3}$

2.17. $a_n = \dfrac{5^n}{2\cdot 5^{n+1}+7}$

2.18. $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{2^{n+1}+3}$

2.19. $a_n = 3+(-1)^n \dfrac{1}{n}$

2.20. $a_n = \dfrac{1}{n}+3\cdot(-1)^n$

2.21. $a_n = \dfrac{3}{n}+(-1)^n$

2.22. $a_n = 2+(-1)^n \dfrac{1}{n^2+1}$

2.23. $a_n = (-1)^n + \dfrac{n+1}{n+2}$

2.24. $a_n = (-1)^n \cdot \lg n$

mateking.hu

2.1. $n_0 = 123$

2.2. $n_0 = 75$

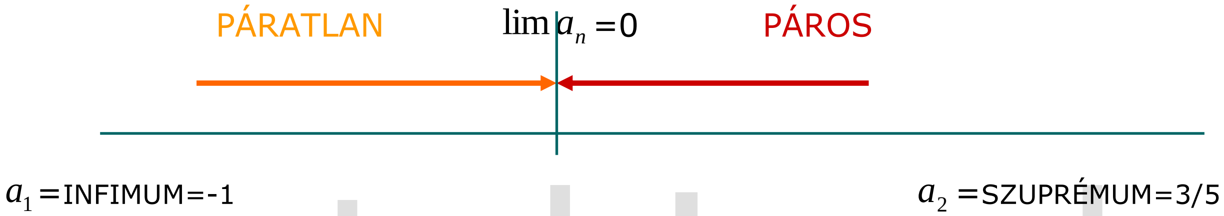
2.3. $n_0 = 328$

2.4. $n_0 = 48$

2.5. $n_0 = 26$

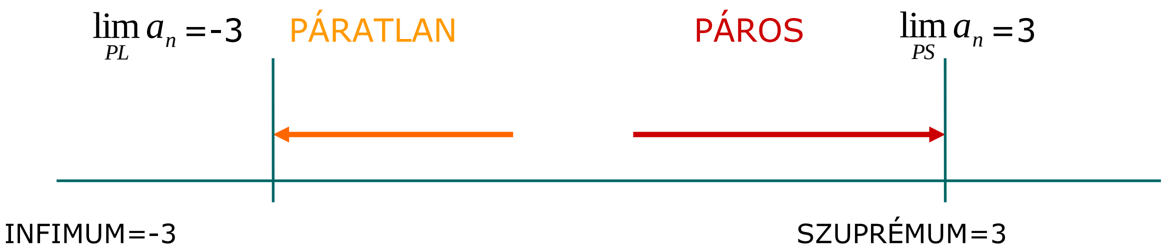
2.6. $n_0 = 49$

2.7. $n_0 = 100$



mateking.hu

2.8. $n_0 =$ nincs, mert div.



2.9. $n_0 =$ nincs, mert div.

a_1 =INFIMUM=-4

a_2 =SZUPRÉMUM=11/2

2.10. $n_0 = 22$

PÁRATLAN $\lim a_n = 0$ PÁROS

a_1 =INFIMUM=-5/2

a_2 =SZUPRÉMUM=1

2.11. $n_0 = 8$

mateking.hu

a_1 =INFIMUM=11/15 Monoton nő $\lim a_n$ =SZUPRÉMUM=3/2

2.12. $n_0 = 3$

a_1 =INFIMUM=15/4 Monoton nő $\lim a_n$ =SZUPRÉMUM=4

2.13. $n_0 = 297$

a_1 =INFIMUM=1/3 Monoton nő $\lim a_n$ =SZUPRÉMUM=1

2.14. $n_0 = 5$

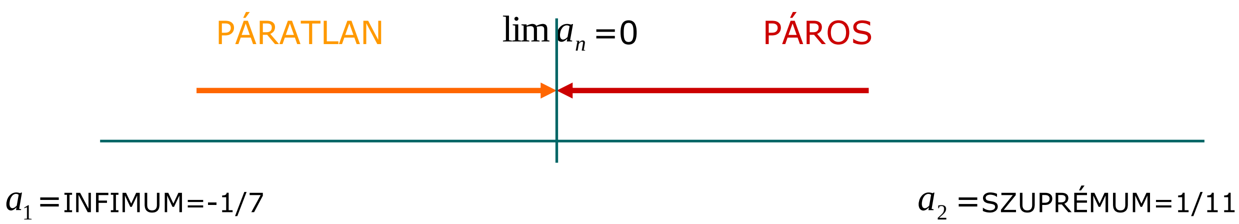
2.15. $n_0 = 4$

2.16. $n_0 = 2$

mateking.hu

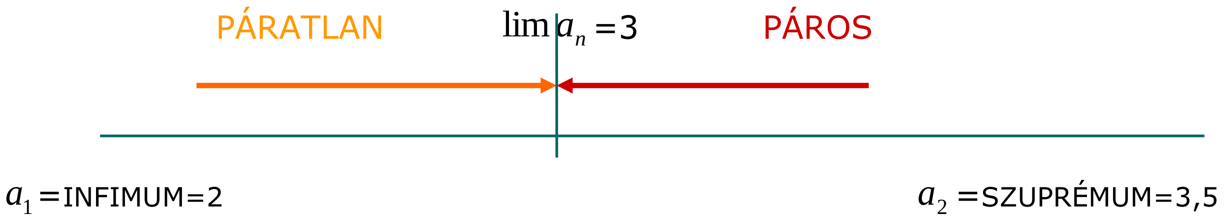
2.17. $n_0 = 1$

2.18. $n_0 = 5$

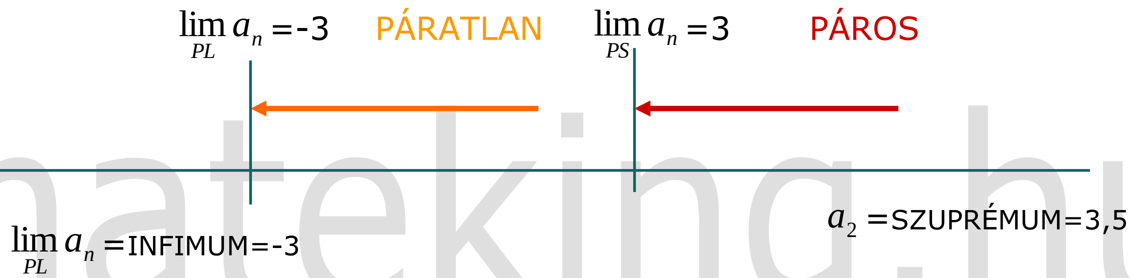


moandris@gmail.com
tel: 06705411417

2.19. $n_0 = 100$

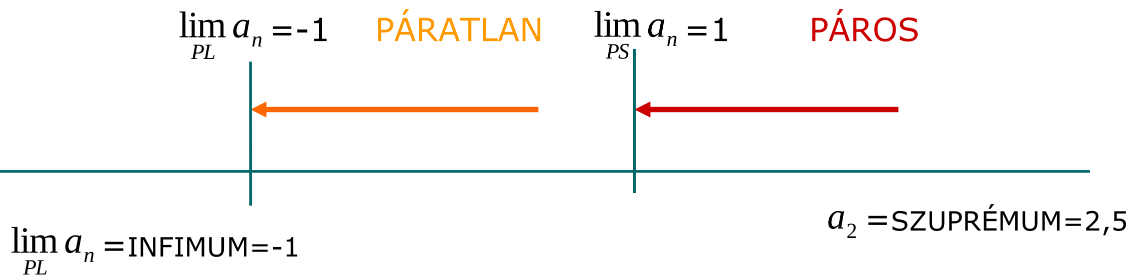


2.20. $n_0 =$ nincs, mert div.



mateking.hu

2.21. $n_0 =$ nincs, mert div.



2.22.

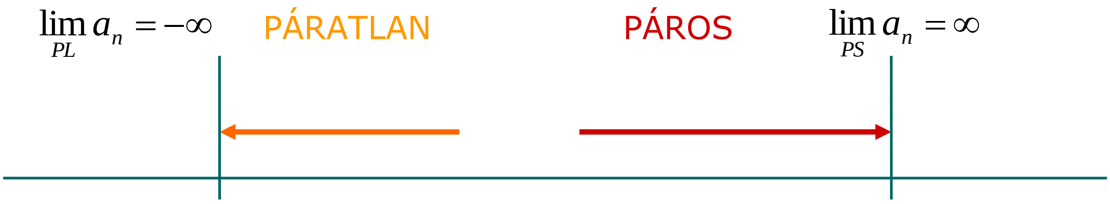
a_1 =INFIMUM=1,5 a_2 =SZUPRÉMUM=2,2

2.23. n_0 =nincs, mert div.

a_1 =INFIMUM=-1/3 $\lim\limits_{PS} a_n$ SZUPRÉMUM=2

mateking.hu

2.24. n_0 =nincs, mert div.



INFIMUM= $\lim\limits_{PL} a_n = -\infty$ SZUPRÉMUM= $\lim\limits_{PS} a_n = \infty$