FURA, ÉRTELMETLEN EGYENLETEK

1. Feladat.

$V_n^{8i} - 5V_n^{7i} - 6V_n^{6i} = 0$, $n = ?$ ha n pozitív egész szám

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy az ismétléses variáció képlete a következő:

$$V_n^{ki} = n^k.$$

Így a $V_n^{8i} - 5V_n^{7i} - 6V_n^{6i} = 0$ egyenletünk a következő alakra írható, ha ezt tagonként alkalmazzuk.

$$n^8 - 5n^7 - 6n^6 = 0$$

Itt n^6 minden tagból kiemelhető, emeljük is ki.

$$n^6 \cdot (n^2 - 5n - 6) = 0$$

Egy szorzat akkor, és csak akkor 0, ha az egyik tényezője 0, így két ágra bontjuk egyenletünket.

- ha $n^6 = 0$

  Ebből az következik, hogy $n = 0$, de mivel n pozitív egész kell, hogy legyen, így ez nem lehet megoldása a feladatnak.

- ha $n^2 - 5n - 6 = 0$

  Ez egy másodfokú egyenlet, alkalmazzuk a megoldóképletet.

$$n_{1,2} \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

Azaz $n_1 = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$, illetve $n_2 = \frac{5-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.

Mivel n pozitív egész kell, hogy legyen, így ezek közül csak az $n = 6$ lehet jó megoldás.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{n = 6}$.

□

2. Feladat.

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46$, $n = ?$ ha n pozitív egész szám

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy az ismétlés nélküli kombináció képlete a következő:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Azaz $C_n^0 = \binom{n}{0}$, $C_n^1 = \binom{n}{1}$, $C_n^2 = \binom{n}{2}$.

Így a $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46$ egyenletünk a következő alakra írható át.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 46$$

Alakítsuk tagonként egyszerűbb alakra az egyenletünket.

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

Így végül a következőre jutunk.

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46$$

Szorozzunk be 2-vel minden tagot, hogy ne maradjon tört az egyenletünkben.

$$2 + 2n + n(n-1) = 92$$

Bontsuk fel a zárójelet.

$$2 + 2n + n^2 - n = 92$$

Vonjuk össze az azonos tagokat.

$$n^2 + n - 90 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet, alkalmazzuk a megoldóképletet.

$$n_{1,2} \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

Azaz $n_1 = \frac{-1+19}{2} = \frac{18}{2} = 9$, és $n_2 = \frac{-1-19}{2} = \frac{-20}{2} = -10$.

Mivel n pozitív egész kell, hogy legyen, így csak az $n = 9$ lehet jó megoldás.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{n = 9}$.

□

3. Feladat.

$3 \cdot \binom{n}{2} + \binom{n}{n-1} = 92$, $\quad n = ?\quad$ ha n pozitív egész szám

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy az ismétlés nélküli kombináció képlete a következő:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Ezt felhasználva alakítsuk tagonként egyszerűbb alakra az egyenletünket.

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{(n-n+1)! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$$

Így végül a következőre jutunk.

$$3 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = 92$$

Szorozzunk be 2-vel minden tagot, hogy ne maradjon tört az egyenletünkben.

$$3 \cdot n \cdot (n-1) + 2n = 184$$

Bontsuk fel a zárójelet.

$$3n^2 - 3n + 2n = 184$$

Vonjuk össze az azonos tagokat, és rendezzük 0-ra az egyenletünket.

$$3n^2 - n - 184 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet, alkalmazzuk rá a megoldóképletet.

$$n_{1,2} \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-184)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2208}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{2209}}{6} = \frac{1 \pm 47}{6}$$

Azaz $n_1 = \frac{1+47}{6} = \frac{48}{6} = 8$, és $n_2 = \frac{1-47}{6} = \frac{-46}{6} = -\frac{23}{3}$.

Mivel n pozitív egész kell, hogy legyen, így csak az $n = 8$ lehet jó megoldás.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{n = 8}$.

□

4. Feladat.

$C_{n+1}^4 + C_n^4 = 5 \cdot C_n^2 \quad n = ?\quad$ ha $n \geq 4$ pozitív egész szám

Megoldás.

A megoldás során felhasználjuk, hogy az ismétlés nélküli kombináció képlete a következő:

$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Azaz $C_{n+1}^4=\binom{n+1}{4}$, $C_n^4=\binom{n}{4}$, $C_n^2=\binom{n}{2}$.

Így a $C_{n+1}^4+C_n^4=5\cdot C_n^2$ egyenletünk a következő alakra írható át.

$$\binom{n+1}{4}+\binom{n}{4}=5\cdot\binom{n}{2}$$

Alakítsuk tagonként egyszerűbb alakra az egyenletünket.

$$\binom{n+1}{4}=\frac{(n+1)!}{((n+1)-4)!\cdot 4!}=\frac{(n+1)!}{(n-3)!\cdot 4!}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-3)\cdot(n-2)\cdot\ldots 1\cdot 4\cdot 3\ldots\cdot 1}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-3)\cdot(n-2)\cdot\ldots 1\cdot 4\cdot 3\ldots\cdot 1}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{4\cdot 3\ldots\cdot 1}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{24}$$

$$\binom{n}{4}=\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-4)\cdot(n-3)\cdot\ldots 1\cdot 4\cdot 3\ldots\cdot 1}=$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-4)\cdot(n-3)\cdot\ldots 1\cdot 4\cdot 3\ldots\cdot 1}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot 3\ldots\cdot 1}=$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}$$

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Így végül a következőre jutunk.

$$\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{24}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}=5\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

Szorozzunk be 24-gyel minden tagot, hogy ne maradjon tört az egyenletünkben.

$$(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)=12\cdot 5\cdot n(n-1)$$

$$(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)=60\cdot n(n-1)$$

Rendezzük 0-ra.

$$(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)-60\cdot n(n-1)=0$$

Emeljünk ki az $n(n-1)$ minden tagból.

$$n\cdot(n-1)\cdot[(n+1)\cdot(n-2)+(n-2)\cdot(n-3)-60]=0$$

A szorzatunk harmadik tagját hozzuk egyszerűbb alakra, bontsuk fel a zárójeleket, és vonjuk össze az azonos tagokat.

$$n\cdot(n-1)\cdot[(n^2-2n+n-2)+(n^2-3n-2n+6)-60]=0$$

$$n\cdot(n-1)\cdot[2n^2-6n-56]=0$$

Egy szorzat akkor, és csak akkor 0, ha az egyik tényezője 0, így három ágra bontjuk egyenletünket.

- ha $n = 0$
- ha $n - 1 = 0$

  Ebből az következik, hogy $n = 1$.

  De sem a 0, sem az 1 nem lehet megoldás, mert n-nek 4-nél nagyobb egyenlőnek kell lennie, ahhoz, hogy a feladat értelmes legyen.

- ha $2n^2 - 6n - 56 = 0$

  Ezt még tudjuk egyszerűsíteni, ha leosztunk 2-vel, így

$$n^2 - 3n - 28 = 0.$$

  Ez egy másodfokú egyenlet, alkalmazzuk rá a megoldóképletet.

$$n_{1,2}\frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{3 \pm 11}{2}$$

Azaz $n_1 = \frac{3+11}{2} = \frac{14}{2} = 7$, és $n_2 = \frac{3-11}{2} = \frac{-8}{2} = -4$.

Mivel $n \geq 4$ és pozitív egész kell, hogy legyen, így csak az $n = 7$ lehet jó megoldás.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{n = 7}$.

□