# GEOMETRIAI VALÓSZÍNŰSÉGEK

**1. Feladat.**

Egy lavina $2000m^2$ területet betemetett egy síelésre gyakran használt térségben. Bence az nap síelni ment, és még nem jelentkezett, így a mentésére sietnek. Mi az esélye, hogy ha a mentőcsapat $500m^2$-t találomra kiás a betemetett területből, megtalálnák Bencét?

**Megoldás.**

Jelöljük a keresett valószínűséget $p$-vel.

Ha Bencét valóban eltemette a lavina, akkor éppen egy $2000m^2$-es területen belül bárhol helyezkedik el. E területen belül a nekünk kedvező az lenne, ha Bence éppen abban a találomra kiválasztott $500m^2$ területű alakzatban helyezkedne el, amit kiásunk, így a valószínűsége annak, hogy első ásásra megtalálnánk Bencét:



$$p = \frac{500}{2000} = 0{,}25.$$

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p = 0,25}$.

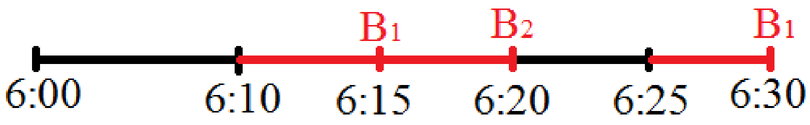
□

**2. Feladat.**

Anna minden reggel 6 és fél 7 között véletlenszerűen érkezik a buszmegállóba. A buszok, amik jók neki, a következőképp járnak. Az egyik 15, a másik 20 percenként indul 5 órától kezdve. Mennyi a valószínűsége, hogy Annának nem kell 5 percnél többet várnia a buszmegállóban?

**Megoldás.**

Ábrázoljuk egy szakaszon a 6 és fél 7 közötti időtartamot, és jelöljük rajta az egyes buszok indulását, illetve jelöljük az előttük levő 5 percnyi időt, hiszen akkor nem kell 5 percnél tovább várnia Annának, ha legfeljebb 5 perccel hamarabb ér be a buszmegállóba, mint egy busz.




Innen könnyen leolvasható, hogy a kedvező részek összhossza 15 hosszú, a teljes szakasz pedig 30 hosszú.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p = \frac{15}{30} = 0,5}$.

□

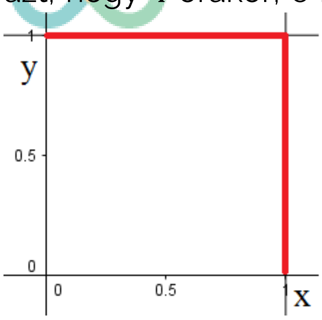
**3. Feladat.**

Anna és Bence megbeszélik, hogy délután 3 és 4 óra között találkoznak egy cukrászdában. Mivel nem beszélték meg elég pontosan az időpontot, mindketten véletlenszerűen érkeznek a megadott órában, és 10 perc várakozás után elmennek. Mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?

---

**Megoldás.**

Jelölje $x$ Anna érkezését (órában), 3 órától, hasonlóan $y$ pedig Bencéét. Így $x$ és $y$ értéke $0$ és $1$ közötti lehet (a $0$ azt jelenti, hogy pontosan $3$ órakor érkezett, az $1$ azt, hogy $4$ órakor, e kettő közötti érték pedig arányosan a $3$ és $4$ óra közötti időt adja).




Mivel az, hogy összefutnak-e, két változótól is függ (a két érkezés), így egy koordinátarendszerben érdemes mindent ábrázolnunk, ahol az egyik tengely $x$, a másik $y$.

Az összes terület egy $1x1$-es négyzet, így $1$ lesz.

A kedvező eseteket érdemes három eset szerint csoportosítanunk, hogy milyen viszony lehet $x$ és $y$, azaz a két személy érkezése között.

1. eset $x = y$

Ha Anna és Bence egyszerre érkeznek, akkor nyilvánvalóan találkoznak is, így ez egy jó eset, ami azt jelenti, hogy az $y = x$ egyenes része lesz a kedvező területünknek, ami persze nem változtat semmin, hiszen az egyenesnek nincs kiterjedése, így területe sem, csak a gondolatmenetünkhöz szükséges.

2. eset $x > y$

Ez azt jelenti, hogy Anna később érkezik, mint Bence. Ahhoz, hogy ennek ellenére még találkozzanak, Annának Bence érkezését követő 10 percben meg kell érkeznie (10 perc $\frac{1}{6}$-nak felel meg az arányainknak), ez a következőt jelenti:

$$x < y + \frac{1}{6}$$

(Az, hogy megengedjük-e az egyenlőséget is, semmit nem fog változtatni a végeredményen, ugyanis azzal egy további egyenest vennénk csak be a kedvező területünkhöz, amivel annak mértéke nem nőne).

Így most két egyenlőtlenséget kaptunk, ami meghatároz egy ponthalmazt.

$$y < x \text{ és } y > x - \frac{1}{6}$$

3. eset $x < y$

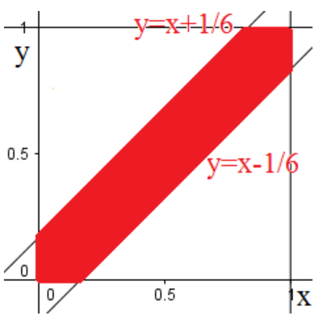


Ez azt jelenti, hogy Bence később érkezik, mint Anna. Ahhoz, hogy ennek ellenére még találkozzanak, Bencének Anna érkezését követő 10 percben meg kell érkeznie (10 perc $\frac{1}{6}$-nak felel meg az arányainknak), ez a következőt jelenti:

$$y < x + \frac{1}{6}$$

Így most két egyenlőtlenséget kaptunk, ami meghatároz egy ponthalmazt.

$$y > x \text{ és } y < x + \frac{1}{6}$$




Ábrázoljuk koordinátarendszerünkben a kedvező területhez megállapított ponthalmazokat, majd számítsuk ki ezek együttes területét. Egyszerűbb ha ezt úgy számítjuk, hogy a teljes négyzet területéből kivonjuk a két $\frac{5}{6}x\frac{5}{6}$ –os fehér derékszögű háromszögek területét.

**Kedvező terület**: $1 - 2 \cdot \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}{2} = \frac{11}{36}$.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p} = \frac{\frac{11}{36}}{1} = \frac{11}{36}$.

□

## 4. Feladat.

Egy raktárhoz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontokban két kamion érkezik. Az előbb érkező kamion rögtön megkezdi a rakodást. A rakodás az egyik kamionnál 1, a másiknál 2 órát vesz igénybe. Ha a második kamion akkor érkezik, amikor az elsőre még rakodnak, akkor várakoznia kell a rakodás befejezéséig. Mekkora a valószínűsége, hogy a két kamion közül valamelyiknek várakoznia kell?

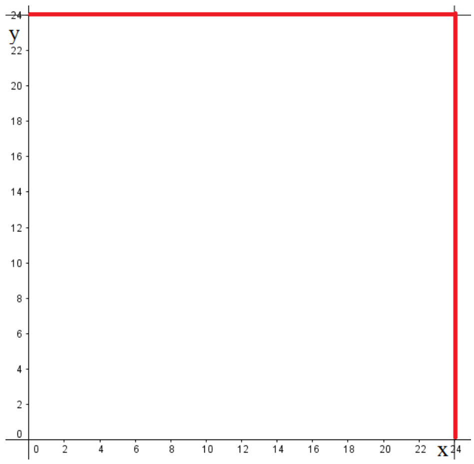
---

**Megoldás.**

Jelöljük a keresett valószínűséget $p$-vel.

Továbbá jelölje $x$, illetve $y$ rendre a két kamion érkezésének időpontját, így az előző feladathoz hasonlóan, ismételten két változónk van, ami azt jelenti, hogy érdemes koordináta rendszert használnunk.

A két változó $0$ és $24$ között vehet fel értékeket, emiatt az összes területet egy $24x24$-es négyzet adja meg.




**Összes terület**: $24 \cdot 24 = 576$.



A kedvező terület meghatározásához három részre érdemes osztanunk $x$ és $y$ egymáshoz való viszonyát.

1. eset $x = y$

Ha a két kamion egyszerre érkezik, akkor csak az egyikük tud rakodásra állni, így a másiknak nyilván várnia kell, tehát az $y = x$ egyenes része lesz a kedvező területünknek, persze ez a végeredményünk szempontjából mindegy lesz, hiszen egyetlen egyenesnek nincs kiterjedése, így nincs területe sem, de ahhoz, hogy biztosan ne felejtsünk ki egyetlen esetet sem, érdemes átgondolni.

2. eset $x > y$

Ez azt jelenti, hogy az $x$ időpontban érkező kamion később érkezik, mint az $y$ időpontban érkező, ami 2 óráig rakodik. Ahhoz tehát, hogy az $x$ időpontban érkezőnek várnia kelljen, annak kell teljesülnie, hogy az $x$ időpontban érkező hamarabb beér, mint $y + 2$, azaz

$$x < y + 2$$

Így most két egyenlőtlenséget kaptunk, ami meghatároz egy ponthalmazt.

$$y < x \text{ és } y > x - 2$$

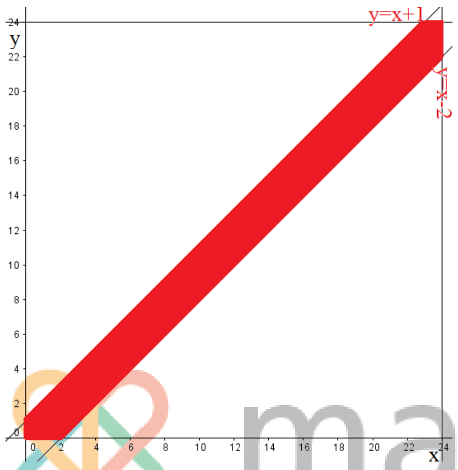
3. eset $x < y$

Ez azt jelenti, hogy az $y$ időpontban érkező kamion később érkezik, mint az $x$ időpontban érkező, ami 1 óráig rakodik. Ahhoz tehát, hogy az $y$ időpontban érkezőnek várnia kelljen, annak kell teljesülnie, hogy az $y$ időpontban érkező hamarabb beér, mint $x + 1$, azaz

$$y < x + 1$$

Így most két egyenlőtlenséget kaptunk, ami meghatároz egy ponthalmazt.

$$y > x \text{ és } y < x + 1$$




Ábrázoljuk koordinátarendszerünkben a kedvező területhez megállapított ponthalmazokat, majd számítsuk ki ezek együttes területét. Egyszerűbb ha ezt úgy számítjuk, hogy a teljes négyzet területéből kivonjuk az egyik $22x22$-es, illetve a másik $23x23$-as fehér derékszögű háromszög területét.

**Kedvező terület**: $576 - \frac{22 \cdot 22}{2} - \frac{23 \cdot 23}{2} = 69{,}5$



Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{69{,}5}}{\mathbf{576}} \approx$

$\approx \mathbf{0,1207}$.

□

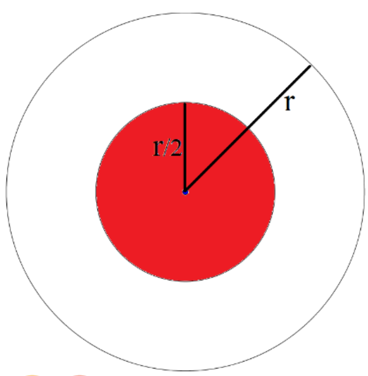
**5. Feladat.**

Egy kör alakú céltáblára lövés érkezik. Mi a valószínűsége, hogy a lövés helye közelebb lesz a kör középpontjához, mint a határvonalához, feltéve, hogy minden lövésünk eltalálja a céltáblát?

---

**Megoldás.**

Jelölje a kör sugarát $r$. Ekkor a kör középpontjától mérve egy lövés távolsága $0$ és $r$ közé eshet csak ($0$ jelenti azt, hogy pont a középpontba találtunk, $r$ azt, hogy a tábla szélére). Ezt a távolságot úgy mérhetjük le, hogy összekötjük a talált pontot és a kör középpontját.




Így könnyen látható, hogy egy lövés például akkor lesz közelebb a középponthoz, ha a távolsága attól kisebb, mint $\frac{r}{2}$. Ez pedig egy olyan kört határoz meg, amelynek középpontja azonos a céltábláéval, de sugara $\frac{r}{2}$.

Így a kedvező esetek területe annak, hogy a kör középpontjához kerül közelebb a lövés, a következő:

$$T_{piros\ kör} = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{r^2}{4}\pi.$$

Az összes terület azt jelenti, hogy eltaláljuk a teljes körlemezt, tehát a teljes körlemez területe adja meg, így ez $r^2\pi$ lesz.

Emiatt annak a valószínűsége, hogy közelebb lesz a kör középpontjához a lövésünk:

$$p(középponthoz\ közelebb) = \frac{\frac{r^2}{4}\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4}.$$

Továbbá mivel ennek az eseménynek a komplementere azt jelenti, hogy nem a kör középpontjához esik közelebb a lövés, ami megegyezik azzal, hogy a határvonalához közelebb lesz, emiatt annak az eseménynek a valószínűsége:

$$p(határvonalához\ közelebb) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

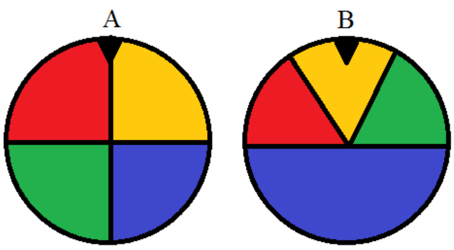
Összességében tehát a feladat megoldása: **Annak az eseménynek nagyobb a valószínűsége, hogy a határvonalához közelebb találjuk el a céltáblát.**

□



**6. Feladat.**

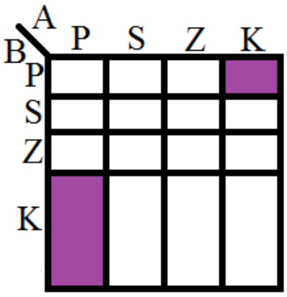
A következő játékot játsszuk. Adottak A és B pörgettyűk.




Kétszer pörgetünk, mindkét alkalommal választhatunk, hogy az A, vagy B pörgettyűt választjuk. Akkor nyerünk, ha a nyíl által kijelölt két szín összekeverve a lilát adja (piros+kék). Hogyan válasszunk a két pörgettyű közül, hogy a lehető legnagyobb eséllyel nyerjünk?

**Megoldás.**

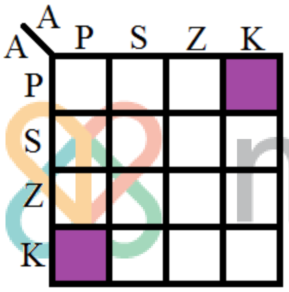
Vizsgáljuk meg külön-külön, hogy az egyes pörgettyűket választva, mi a valószínűsége, hogy lila színt kapnánk, ez összesen 3 eset lesz, mert a szín keverése során a sorrend nem számít.




1. eset, A és B pörgettyűt választjuk

Egy egység oldalú négyzetben ábrázolhatnánk a lehetséges kikevert színeket, leginkább úgy, hogy csak a lila színnel foglalkozunk, hiszen a feladat arra kíváncsi.

Innen könnyen leolvasható a kedvező terület, a két lila színnel ábrázolt síkidom területét kell összeadnunk. A jobb felső lila téglalap $\frac{1}{4}x\frac{1}{6}$-os, a bal alsó téglalap pedig $\frac{1}{4}x\frac{1}{2}$-es, így a terület összegük $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, ami így maga a valószínűség is, hiszen a teljes terület 1 volt.

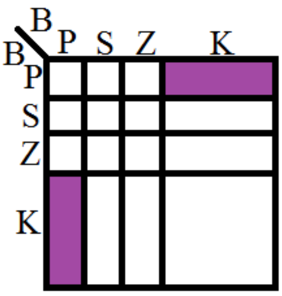



2. eset, A és A pörgettyűt választjuk

Ismét egy egység oldalú négyzetben ábrázoljuk a lehetséges kikevert színeket, a lilára koncentrálva.



Innen könnyen leolvasható a kedvező terület, a két lila színnel ábrázolt síkidom területét kell összeadnunk. Most mindkét lila síkidom egy-egy $\frac{1}{4}x\frac{1}{4}$-es négyzet, így a terület összegük $2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, ami így maga a valószínűség is, hiszen a teljes terület 1 volt, ez pedig kisebb valószínűség, mint amit az A és B választása esetén kaptunk.




3. eset, B és B pörgettyűt választjuk

Megint egy egység oldalú négyzetben ábrázoljuk a lehetséges kikevert színeket, a lilára koncentrálva.

Innen könnyen leolvasható a kedvező terület, a két lila színnel ábrázolt síkidom területét kell összeadnunk. A jobb felső lila téglalap $\frac{1}{2}x\frac{1}{6}$-os, a bal alsó téglalap pedig $\frac{1}{6}x\frac{1}{2}$-es, így a terület összegük $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, ami így maga a valószínűség is, hiszen a teljes terület 1 volt, és ez pont meg egyezik az eddig vezető A és B választásos valószínűségével.

Összességében tehát a feladat megoldása: **Vagy az A és B, vagy B és B pörgettyűket kell választanunk**.

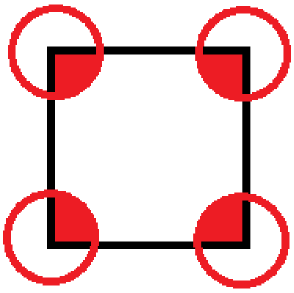
□

**7. Feladat.**

Egy $10x10$cm-es négyzetre leejtünk három darab $1$ cm sugarú érmét. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két érme a négyzet valamelyik csúcsát le fogja fedni? (Az érméket egymás után dobjuk el.)

---

**Megoldás.**



Vizsgáljuk először annak a valószínűségét, hogy egy érme a négyzet bármelyik csúcsát le fogja fedni.

Mivel egy érme sugara $1$ cm, ahhoz, hogy érintse a négyzet egy csúcsát, a középpontja legfeljebb $1$ cm-re lehet az adott csúcstól.

Vizsgáljuk emiatt az egész feladatot úgy, hogy az érme helye csak a középpontjától függ, és amikor véletlenszerűen elhelyezzük, lényegében egy véletlen pontot választunk, ami a középpontja lesz.

Így csak akkor fogja lefedni az adott érme a négyzet valamely csúcsát, ha az ábrán jelölt helyekre esik a középpontja.

Alapjában véve az érme középpontja bárhova eshet a $10x10$-es négyzeten belül, így az összes terület: $10 \cdot 10 = 100$ lesz. A kedvező terület a 4 negyed kör területének összege lesz, ami egy teljes kört ad. Ennek a körnek a sugara $1$ cm, így a 4 negyed kör együttes területe $1^2 \cdot \pi = \pi$ lesz.

Annak a valószínűsége tehát, hogy egy adott érme, lefedi bármely csúcsát a négyzetnek $\frac{\pi}{100}$ lesz.

Nekünk viszont most annak a valószínűségét kell megadnunk, hogy legalább 2 érmére fog ez teljesülni.

Ezt két külön, egymást kizáró eseményre érdemes bontanunk, mégpedig arra, hogy pontosan 2, illetve pontosan 3 érme fog csúcsot fedni.

1. eset: pontosan 2 érme fog csúcsot fedni a 3-ból

E valószínűség meghatározásához először is le kell számlálnunk, hogy a 3 érméből melyik lesz az a 2, melyekre teljesül majd a feltétel, hányféleképpen tudjuk kiválasztani $\left[\binom{3}{2}\right]$, majd ez a két érme $\frac{\pi}{100}$ valószínűséggel fog valóban csúcsot érinteni, annak az egynek, amit kihagyunk, viszont szigorúan nem szabad most sarkot érintenie $\left[1 - \frac{\pi}{100} = \frac{100-\pi}{100}\right]$, ugyanis ha véletlen érintene, akkor itt is számolnánk a 2. eset eseteit, így hibás eredményre jutnánk.

$$p(2\,fed, 1\,nem) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{100}\right)^2 \cdot \frac{100-\pi}{100}$$

2. eset: mind a három érme csúcsot fog fedni

Az előző eset gondolatmenetéhez hasonlóan most a valószínűség a következő lesz.

$$p(3\,fed, 0\,nem) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{100-\pi}{100}\right)^0 = \left(\frac{\pi}{100}\right)^3$$

A feladat megoldása e két valószínűségek összege lesz.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{100}\right)^2 \cdot \frac{100-\pi}{100} + \left(\frac{\pi}{100}\right)^3}$.

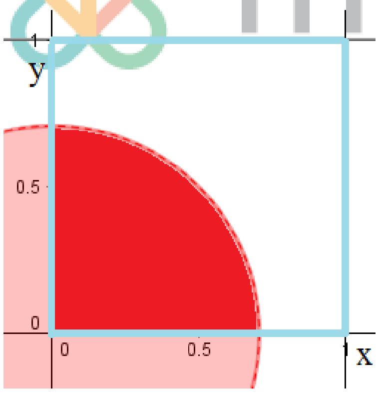
□

**8. Feladat.**

Véletlenszerűen kiválasztunk két számot a $(0,1)$ intervallumból. Jelöljük a két számot $x$-szel, illetve $y$-nal. Mennyi a valószínűsége, hogy $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ teljesül?

**Megoldás.**

A két szám bármely értéket felvehet a $(0,1)$ intervallumból, így az összes területet egy $1x1$-es négyzet területe fogja megadni, tehát 1 lesz.




A kedvező terület meghatározásához vizsgáljuk a $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget. Vegyük észre, hogy ez egy nyílt kört ad meg, melynek középpontja a $(0,0)$ pont, sugara pedig $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ennek a körnek viszont csak a negyede metszik bele az eseményterünkbe, így a kedvező terület:

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p = \frac{\frac{\pi}{8}}{1} = \frac{\pi}{8}}$.

□

**9. Feladat.**

A $(0{,}5)$ intervallumot felosztjuk $(0{,}2)$ és $(2{,}5)$ részekre. Egymás után véletlenszerűen kiválasztunk két pontot, mekkora valószínűséggel esnek különböző részekbe?

**Megoldás.**

Annak a valószínűsége, hogy egy pont az első intervallumba esik, megegyezik az első intervallum és a teljes intervallum hosszának hányadosával, azaz $p(\textit{elsőbe esik}) = \frac{2}{5}$. Hasonlóan a második intervallumba esés valószínűsége $p(\textit{másodikba esik}) = \frac{3}{5}$.

Továbbá figyelembe kell még vennünk, hogy a két pont tetszőleges sorrendben eshet az első, illetve második intervallumba, ez $2! = 2$ féle sorrendet jelent.

Összességében a keresett valószínűség így a következő lesz:

$$p = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}.$$

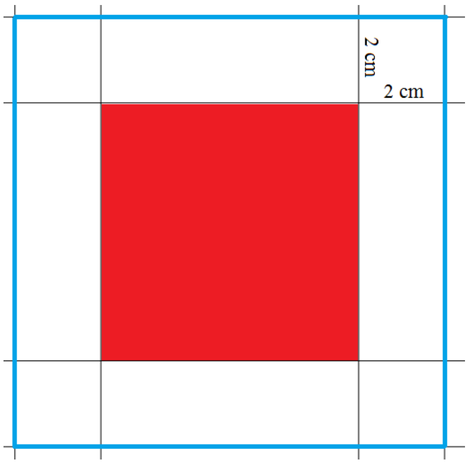


Összességében tehát a feladat megoldása: $\frac{12}{25}$ **valószínűséggel esik a két pont két különböző részbe**.

□

**10. Feladat.**

Egy $10x10$cm-es négyzetre leejtünk három darab $2$ cm sugarú érmét. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két érme nem fogja érinteni a négyzet egyik szélét sem, tehát teljesen a belsejében landol? (Az érméket egymás után dobjuk el.)




**Megoldás.**

Az érmét azonosítjuk középpontjával.

Ahhoz, hogy egy érme ne érintse a négyzet széleit, a középpontjának a négyzet minden oldalától legalább 2 cm távolságra kell lennie.

A teljes tér, ahova eshet egy érme, a teljes négyzet, melynek területe $10 \cdot 10 = 100$ egység.

A kedvező terület, ahova esik egy érme, ha nem érintkezik a négyzet széleivel, a középen lévő piros négyzet, melynek területe $8 \cdot 8 = 64$

egység.

Tehát annak a valószínűsége, hogy egy adott érme a négyzet belsejébe esik: $p = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

Nekünk viszont annak a valószínűségét kell megadnunk, hogy legalább két érmére fog ez teljesülni. Ezt érdemes két egymást kizáró esetre szétbontani.

1. eset, két érme a négyzeten belül, egy nem oda esik

Ez a valószínűség meghatározásához először is le kell számlálnunk, hogy a 3 érméből melyik lesz az a 2, melyekre teljesül majd a feltétel, hányféleképpen tudjuk kiválasztani $\left[\binom{3}{2}\right]$, majd ez a két érme $\frac{16}{25}$ valószínűséggel fog a négyzet belsejébe esni, annak az egynek, amit kihagyunk, viszont szigorúan nem szabad most a négyzet belsejébe esnie $\left[1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}\right]$, ugyanis ha véletlen nem érintene egy szélt sem, akkor itt is számolnánk a 2. eset eseteit, így hibás eredményre jutnánk.

$$p(2\ belül, 1\ nem) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^2 \cdot \frac{9}{25}.$$



2. eset, három érme négyzeten belül

Az előző eset gondolatmenetéhez hasonlóan most a valószínűség a következő lesz.

$$p(3\ belül, 0\ nem) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^0 = \left(\frac{16}{25}\right)^3.$$

A feladat megoldása e két valószínűségek összege lesz.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^2 \cdot \frac{9}{25} + \left(\frac{16}{25}\right)^3}$.

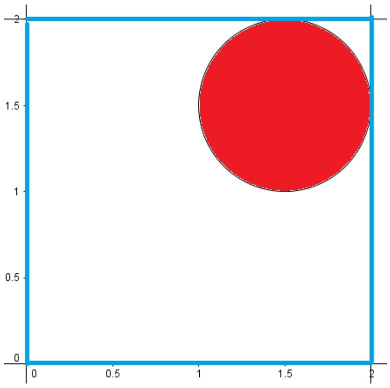
□

**11. Feladat.**

A $[0{,}2]x[0{,}2]$ négyzeten belül egymás után véletlenszerűen kiválasztunk 10 pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két pont esik az $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$ ponthalmazba?

---

**Megoldás.**




Az $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$ ponthalmaz, egy $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ középpontú és $\frac{1}{2}$ sugarú kör, mely a $[0{,}2]x[0{,}2]$ négyzethez képest a mellékelt ábrának megfelelően helyezkedik el.

A vizsgált, piros kör területe $\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi=\frac{\pi}{4}$, a teljes négyzet területe $2\cdot 2=4$, így annak a valószínűsége, hogy egy pont a körön belül esik: $\frac{\frac{\pi}{4}}{4}=\frac{\pi}{16}$, annak pedig, hogy nem $1-\frac{\pi}{16}=\frac{16-\pi}{16}$ lesz.

Nekünk most viszont annak a valószínűsége kell, hogy legfeljebb két pont esik a piros körbe, válasszuk ezeket egymást kizáró esetekre.



1. eset, pontosan 0 pont esik a piros körbe, 3 nem

$$p(0\;k\ddot{o}rben,3\;nem)=\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{\pi}{16}\right)^0\cdot\left(\frac{16-\pi}{16}\right)^3=\left(\frac{16-\pi}{16}\right)^3.$$

2. eset, pontosan 1 pont esik a piros körbe, 2 nem

$$p(1\;k\ddot{o}rben,2\;nem)=\binom{3}{1}\cdot\frac{\pi}{16}\cdot\left(\frac{16-\pi}{16}\right)^2=3\cdot\frac{\pi}{16}\cdot\left(\frac{16-\pi}{16}\right)^2.$$

3. eset, pontosan 2 pont esik a piros körbe, 1 nem

$$p(2\;k\ddot{o}rben,1\;nem)=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\cdot\frac{16-\pi}{16}=3\cdot\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\cdot\frac{16-\pi}{16}.$$

A feladat megoldása e két valószínűségek összege lesz.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p=\left(\frac{16-\pi}{16}\right)^3+3\cdot\frac{\pi}{16}\cdot\left(\frac{16-\pi}{16}\right)^2+3\cdot\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\cdot\frac{16-\pi}{16}}$.

□

**12. Feladat.**

A $(0{,}1)$ intervallumban véletlenszerűen kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több lesz, mint a másik kétszerese?

**Megoldás.**

Mivel mindkét számtól függ az, hogy mekkora különbség van köztük, emiatt két változónk van, így koordinátarendszerben fogunk ábrázolni.

Az összes terület egy $1x1$-es négyzet lesz.

Két esetet különböztethetünk meg (most ha a két szám megegyezik, nem vizsgáljuk, hiszen akkor nyilván nem lesz legalább kétszer nagyobb az egyik a másiknál).

1. eset, ha $x > y$

Ahhoz, hogy legalább kétszer akkora legyen, mint $y$, nagyobbnak kell lennie $2y$-nál, azaz a következő $y$-ra rendezett egyenlőtlenséget kapjuk:

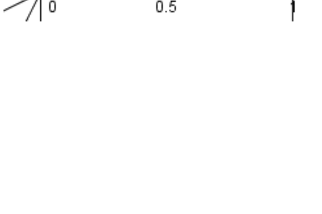
$$y < \frac{1}{2}x$$



2. eset, ha $x < y$

Ahhoz, hogy legalább kétszer akkora legyen, mint $x$, nagyobbnak kell lennie $2x$-nél, azaz a következő $y$-ra rendezett egyenlőtlenséget kapjuk:

$$y > 2x$$




Ábrázoljuk koordinátarendszerünkben a kedvező területhez megállapított ponthalmazokat, majd számítsuk ki ezek együttes területét. Mindkét piros háromszög $\frac{1}{2}x1$-es derékszögű, így a kedvező terület a következő lesz.

**Kedvező terület**: $2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

□

**13. Feladat.**

A $(0{,}3)$, $(0{,}5)$ szakaszokon véletlenszerűen választunk egy-egy pontot, jelölje $x$ és $y$. Mennyi a valószínűsége, hogy az $x$, $y$, és $2$ hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?

---

**Megoldás.**

Három adott hosszúságú szakaszból egy háromszög akkor szerkeszthető meg, ha mindhárom oldalánál hosszabb a másik két oldal összege, azaz

1. feltétel, $x + y > 2$

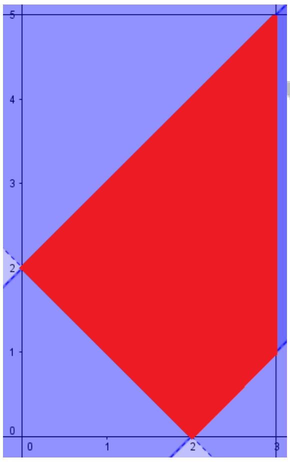
$y$-ra rendezve: $y > -x + 2$

2. feltétel, $x + 2 > y$

$y$-ra rendezve: $y < x + 2$

3. feltétel, $2 + y > x$

$y$-ra rendezve: $y > x - 2$



Mivel mind a három feltételnek egyszerre kell teljesülnie, így a következő ponthalmazt adja meg a kedvező területet:

$$y > -x + 2 \text{ és } y < x + 2 \text{ és } y > x - 2$$



Ennek az alakzatnak egyszerűbb meghatározni a területét úgy, hogy kivonjuk a három derékszögű háromszög területét a teljes téglalap területéből.

A teljes téglalap területe, ami egyébként az összes terület: $3 \cdot 5 = 15$ egység.

A három derékszögű háromszög együttes területe: $\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} = 7$.

Összességében tehát a feladat megoldása: $\boldsymbol{p = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}}$.

□