FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKÉNEK KISZÁMOLÁSA

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = ?$$

Véges helyen vett határérték

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

Ilyenkor az első lépés, hogy helyettesítsük be a függvénybe az a-t.
Ha amit így kapunk értelmezhető, akkor kész is vagyunk, az a szám a határérték*.
Ha amit kapunk nem értelmezhető, akkor az alábbi esetek lehetnek

Végtelenben vett határérték

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Ilyenkor tökugyanazt kell csinálni, mint amit a sorozatok határértékének a kiszámolásánál.

$$\frac{0}{0}$$

SZORZATTÁ ALAKÍTJUK AKI NULLA

$$\frac{\text{szám}}{0}$$

egyéb

VALAMIT ITT IS CSINÁLUNK
de nyugi, ilyen nem szokott lenni

A $\frac{0}{0}$ esetben, ahol mindkettő nulla a számlálót is és a nevezőt is szorzattá alakítjuk.

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot valami}{(x-a)\cdot izé}$$

A $\frac{\text{szám}}{0}$ esetben pedig, ahol csak a nevező nulla, ott csak a nevezőt alakítjuk szorzattá.

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to a}\frac{valami}{(x-a)\cdot izé} = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\frac{valami}{izé}$$

*Ez csak folytonos függvényekre igaz, de a feladatok készítőinek fantáziája szerencsére megragadt ezeknél.

A $\frac{0}{0}$ esetben a számlálót is és a nevezőt is szorzattá alakítjuk.

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot valami}{(x-a)\cdot izé}$$

ha a számláló és nevező is másodfokú, akkor van egy remek trükk, elég a másodfokú tagot és a konstanst nézni

$x^2=x\cdot x$

$20=(-4)\cdot(-5)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-9x+20}{x^2-x-12}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\cdot valami}{(x-4)\cdot izé}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\cdot(x-5)}{(x-4)\cdot(x+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-5)}{(x+3)}=\frac{-1}{7}$$

$-12=(-4)\cdot 3$

$x^2=x\cdot x$

$4x^2=x\cdot 4x$

$-10=(-2)\cdot 5$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-3x-10}{3x^2-8x+4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot valami}{(x-2)\cdot izé}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(4x+5)}{(x-2)\cdot(3x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(4x+5)}{(3x-2)}=\frac{13}{4}$$

$4=(-2)\cdot(-2)$

$3x^2=x\cdot 3x$

$3x^2=x\cdot 3x$

$1=1\cdot 1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{5x^2+x-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot valami}{(x+1)\cdot izé}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(3x+1)}{(x+1)\cdot(5x-4)}=\lim_{x\to -1}\frac{(3x+1)}{(5x-4)}=\frac{-2}{-9}$$

$-4=1\cdot(-4)$

$5x^2=x\cdot 5x$

Ha magasabb fokúval van dolgunk, akkor érdemes kiemeléssel kísérletezni. Ez általában sikerül is. Néha nem tudunk kiemelni, ilyenkor az erősebb idegzetűek próbálkozhatnak polinomosztással, ez hamarosan jön, a gyengébb idegzetűeknek pedig érdemes kétségbe esni.

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^3-12x^2}{x^4-16x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 4}\frac{3x^2(x-4)}{x^2(x^2-16)}=\lim_{x\to 4}\frac{3x^2(x-4)}{x^2(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{3}{(x+4)}=\frac{3}{8}$$

A $\frac{\textit{szám}}{0}$ esetben csak a nevezőt alakítjuk szorzattá

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\textit{valami}}{(x-a)\cdot \textit{izé}}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\frac{\textit{valami}}{\textit{izé}}$$

$$\frac{1}{+0}=+\infty \qquad \frac{1}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+x-6}\overset{\frac{\textit{szám}}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\textit{valami}}{(x-2)\cdot \textit{izé}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)\cdot(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x^2-1}{x+3}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{3}{5}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{-0}\cdot\frac{3}{5}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{+0}\cdot\frac{3}{5}=+\infty\end{cases}$$

ilyenkor mindig meg kell nézni a jobb és a bal oldali határértéket is

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-1}{x^2-8x+15}\overset{\frac{\textit{szám}}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{\textit{valami}}{(x-3)\cdot \textit{izé}}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-1}{(x-3)\cdot(x-5)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-x-1}{x-5}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{5}{-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{5}{-2}=\frac{1}{-0}\cdot\frac{5}{-2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{5}{-2}=\frac{1}{+0}\cdot\frac{5}{-2}=-\infty\end{cases}$$

Ha mondjuk látszik, hogy a nevező biztosan pozitív, akkor kár fáradnunk.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{(x-2)^2}=\frac{5}{+0}=+\infty$$

tuti pozitív

$$\lim_{x\to -1}\frac{4x+3}{(x+1)^4}=\frac{-1}{+0}=-\infty$$

tuti pozitív

Most pedig nézzük meg hogyan is működik a polinomosztás. Ez tényleg csak kimondottan erős idegzetűeknek ajánlott és szerencsére könnyen elkerülhető a L'Hospital szabály segítségével, ami életünk számos problémáját meg fogja oldani.

Van itt egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, amikor ugye a számlálót is és a nevezőt is szorzattá kell alakítani:

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot valami}{(x-a)\cdot izé}$$

Sajnos azonban van egy kis probléma, ugyanis a számláló és a nevező is negyedfokú.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^4+x^3-4x^2-12x-16}{x^4-3x^3+x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot valami}{(x-2)\cdot izé}$$

A valami és az izé kitalálásához ezért rettenetes polinomosztásra lesz szükség.

mindig ezzel osztunk (az osztó legmagasabb fokú tagjával)

$$\left(3x^4+x^3-4x^2-12x-16\right) : (x-2)=3x^3+7x^2+10x+8$$

1. $3x^4 : x$

$3x^4-6x^3$

visszaszorzunk: $(x-2)\cdot 3x^3=3x^4-6x^3$
levonjuk

$7x^3-4x^2-12x-16$

2. $7x^3 : x$

$7x^3-14x^2$

visszaszorzunk: $(x-2)\cdot 7x^2=7x^3-14x^2$
levonjuk

$10x^2-12x-16$

3. $10x^2 : x$

$10x^2-20x$

visszaszorzunk: $(x-2)\cdot 10x=10x^2-20x$
levonjuk

$8x-16$

4. $8x : x$

A polinomosztás elvégzése a nevezőben is nagyon élvezetes:

$$\left(x^4-3x^3+x+6\right):(x-2)=x^3-x^2-2x-3$$

Most, hogy végre sikerült szorzattá alakítani a számlálót és a nevezőt, már sok dolgunk nincsen:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^4+x^3-4x^2-12x-16}{x^4-3x^3+x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(3x^3+7x^2+10x+8\right)}{(x-2)\cdot\left(x^3-x^2-2x-3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+7x^2+10x+8}{x^3-x^2-2x-3}=\frac{80}{-3}$$

FOLYTONOSSÁG

DEFINÍCIÓ: Az $f(x)$ függvény folytonos az a helyen, ha értelmezve van az a helyen, létezik és véges a határértéke az a helyen és

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

DEFINÍCIÓ: Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a helyen, ha értelmezve van az a helyen és létezik véges a határértéke az a helyen.

Teendők egyéb $\frac{0}{0}$ esetben

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
$\lim_{IZÉ\to 0}\frac{\sin IZÉ}{IZÉ}=1$	$\lim_{IZÉ\to 0}\frac{1-\cos IZÉ}{IZÉ^2}=\frac{1}{2}$

ha a szinuszban 2x van, de a nevezőben csak x, akkor cselhez kell folyamodni.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 4}\frac{2\sin 2x}{2x}=1$$

először leosztunk x-el, aztán tömegesen alkalmazzuk az előző cselt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{5x+\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}{5+\frac{\sin 4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{2}\frac{\sin 2x}{\boldsymbol{2}x}+\boldsymbol{3}\frac{\sin 3x}{\boldsymbol{3}x}}{5+\boldsymbol{4}\frac{\sin 4x}{\boldsymbol{4}x}}=\frac{\boldsymbol{2}\cdot 1+\boldsymbol{3}\cdot 1}{5+\boldsymbol{4}\cdot 1}=\frac{5}{9}$$

L'HOSPITAL SZABÁLY (A CSODAFEGYVER)

HA $f(x)$ ÉS $g(x)$ DERIVÁLHATÓ α EGY KÖRNYEZETÉBEN ÉS A $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ HATÁRÉRTÉK $\frac{0}{0}$ VAGY $\frac{\infty}{\infty}$ TÍPUSÚ, VALAMINT LÉTEZIK A $\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ HATÁRÉRTÉK, AKKOR $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

A L'Hospital szabály segítségével azokat a határértékeket, amikkel eddig szenvedtünk, most rettentő gyorsan ki tudjuk számolni. Egyetlen bökkenő az, hogy kell tudni deriválni.

LÁSSUNK NÉHÁNY PÉLDÁT!

deriváljuk

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-9x+20}{x^2-x-12}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 4}\frac{2x-9}{2x-1}=\frac{-1}{7}$$

deriváljuk

---

deriváljuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{5x+\sin 4x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 2+\cos 3x\cdot 3}{5+\cos 4x\cdot 4}=\frac{1\cdot 2+1\cdot 3}{5+1\cdot 4}=\frac{5}{9}$$

deriváljuk

---

deriváljuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{arctgx+\sin x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{\frac{1}{1+x^2}+\cos x}=\frac{1+0}{1+1}=\frac{1}{2}$$

deriváljuk

---

deriváljuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\ln\cos x}{e^{\sin x}-\cos x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{e^{\sin x}\cdot\cos x+\sin x}=\frac{1+1\cdot 0}{1\cdot 1+0}=1$$

deriváljuk

Az is lehet, hogy x nem egy konkrét számhoz tart, hanem mondjuk végtelenbe, a L'Hospital szabály ilyen esetekben is remekül használható.

Van aztán olyan is, hogy kétszer egymás után kell használni a L'Hospital szabályt

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-9x^2+24x-20}{2x^3-7x^2+4x+4}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-18x+24}{6x^2-14x+4}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 2}\frac{6x-18}{12x-14}=\frac{-6}{10}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos x-e^x}{x^2+\sin x-x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x-e^x}{2x+\cos x-1}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{0+\cos x-e^x}{2-\sin x-0}=\frac{1-1}{2-0-0}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-4}{3x^2+4x-5}\overset{\frac{\infty}{\infty}\ L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{6x+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}\ L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln\left(x^2+\ln x\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}\ L}{=}\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2+\ln x}\cdot\left(2x+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\ln x}{2x+\frac{1}{x}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\ L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{1}{x}}{2+\frac{-1}{x^2}}=\infty$$

mielőtt megint jönne a L'Hospital-szabály, előbb számlálót nevezőt beszorozzuk $x^2+\ln x$-el

Sőt olyan is van, amikor többször egymás után.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\cos 2x+e^{-2x}-2}{6x-6\sin x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-\sin 2x\cdot 2-e^{-2x}\cdot 2}{6-6\cos x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x\cdot 4+e^{-2x}\cdot 4}{6\sin x}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot 8-e^{-2x}\cdot 8}{6\cos x}=\frac{-8}{6}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^4-12x^3+12x^2-4x}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{16x^3-36x^2+24x-4}{5x^4-4x^3-6x^2+4x+1}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{48x^2-72x+24}{20x^3-12x^2-12x+4}\overset{\frac{0}{0}\ L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{96x-72}{60x^2-24x-12}=\frac{24}{24}=1$$

Es van olyan is, hogy tudni kell időben leállni.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctg\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}\;L}{=}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin^2 x-\cos x}{3x^2\cdot\left(1+\sin^2 x\right)}}_{\text{számlálót nevezőt beszorozzuk } 1+\sin^2 x\text{-el}}=$$

megcseréljük

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin^2 x-\cos x}{3x^2\cdot\left(1+\sin^2 x\right)}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+1-\cos x}{3x^2\cdot\left(1+\sin^2 x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}}{3\cdot\left(1+\sin^2 x\right)}}_{\text{ha megint L'Hospital szabályt használnánk, túl bonyolult lenne, viszont ha osztunk } x^2\text{–tel, kész is}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{3\cdot(1+0)}=\frac{1}{2}$$

Itt egy másik eset, amikor csak egyszer érdemes használni a L'Hospital szabályt, és utána jobb a hagyományos eszközöket használni.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^4+x^3\right)}{x}\overset{\frac{0}{0}\;L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^4+x^3}\cdot\left(4x^3+3x^2\right)}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2}{x^4+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=0$$

A L'HOSPITAL SZABÁLY $0\cdot\infty$ ESETEKBEN IS HASZNÁLHATÓ, HA A SZORZATBÓL CSINÁLUNK TÖRTET.

$$\lim_{x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\-\infty}}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\;L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{-1}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\underset{\substack{\downarrow\\\infty}}{x^2}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\0}}{e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}\;L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}\;L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x^2}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\\infty}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\;L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-2\cdot x^{-3}\right)}{-2\cdot x^{-3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=\infty$$

L'HOSPITAL SZABÁLY TOVÁBBI ALKALMAZÁSAI

A L'Hospital szabály használható rendkívül cseles 0^0 és ∞^0 határértékekre is.
Ehhez mindössze a logaritmus definíciójában kell elmélyednünk egy csöppet:

$$BÁRMI = e^{\ln BÁRMI}$$

Ezt az átalakítást alkalmazva

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(x^x\right)}$$

először kiszámoljuk a kitevő hova tart:

$$\lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \ln x = \mathbf{0}$$

amit aztán visszarakunk:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(x^x\right)} = e^{\mathbf{0}} = 1$$